

通信原理

一、确定信号分析

1. 基础运算

$$\langle x, y \rangle = \int x(t) y^*(t) dt \quad \text{and} \quad |\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{E_x E_y}$$

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \langle X(f), Y(f) \rangle \quad \text{and} \quad \int x(t) y(t) dt = \int X(f) Y^*(-f) df$$

如果 $x(t)$ 是 Real Signal, $X(f) = X^*(-f)$, 即 $X(f)$ 共轭对称。

补充: 变量替换 $\int_a^b f(x) dx \xrightarrow{\varphi(t)=x} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$, 积分上下限并无穷大时, 仍成立。

而变量替换第一个条件是: $\varphi: a \rightarrow b, t = \varphi^{-1}(x): \varphi^{-1}(a) \rightarrow \varphi^{-1}(b)$ 。

FT的时间反转性质: $x(-t) \leftrightarrow X(-f)$ 。

FT的对称性质: 实偶对称性, 实奇反对称性。

$$\text{单位FS变换对: } \sum_n \delta(t - nT) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{T} \sum_m e^{j \frac{2\pi m}{T} t}$$

$$\xleftrightarrow{FT} \frac{1}{T} \sum_n \delta(f - \frac{n}{T}) \xleftrightarrow{FS} \sum_m e^{j 2\pi f T m}$$

2. 能量谱密度 & 功率谱密度

① Define. $E_x = \int |x(f)|^2 df = \int E_x(f) df$

能量谱

Property

$$R_x(\tau) = \langle x(t+\tau), x(t) \rangle = \int x^*(t) x(t+\tau) dt \quad (\text{且注意共轭! 必须 Define})$$

$$R_x(\tau) = R_x^*(-\tau), \text{ where } x(t) \text{ is real, } R_x(\tau) = R_x(-\tau)$$

$$R_x(\tau) \xleftrightarrow{FT} E_x(f), \text{ and } \int E_x(f) df = E_x = R_x(0)$$

② Define
P.D.

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_T}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x_T(f)|^2 df = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{|x_T(f)|^2}{T} df = \int R_x(f) df$$

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t) x(t+\tau) dt \quad (\text{对比能量谱多了 } \frac{1}{T})$$

Property

$$\text{共轭对称性, } x(t) \text{ real, 共轭对称. } R_x(\tau) \leftrightarrow P_x(f)$$

Remark 1 对于周期信号 $R_x = \frac{1}{T} \int_0^T x^*(t) x(t+\tau) dt$ (T为一个周期)

$$x(t) = \sum_n s_n e^{j 2\pi n t / T} \quad (FS) \quad \text{and} \quad R_x(\tau) = \sum_n |s_n|^2 e^{j 2\pi n \tau / T}$$

周期信号的功率谱依然周期, 且周期相同。

Remark 2

$$\text{对于特征周期信号 } e^{j 2\pi f_0 t} (x(t)), \quad R_x(\tau) = e^{j 2\pi f_0 \tau}, \quad P_x(f) = \delta(f - f_0), \quad P_x = 1$$

Remark 3

$$\text{对于周期信号 } \sum_n \delta(t - nT_s), \text{ 由FS, } \sum_n \delta(t - nT_s) = \frac{1}{T_s} \sum_m e^{j 2\pi m t / T_s} \triangleq x(t)$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T_s} \sum_m e^{j 2\pi m \tau / T_s}, \quad P_x(f) = \frac{1}{T_s} \sum_m \delta(f - \frac{m}{T_s})$$

③ Define

互能量谱

互功率谱

Property

$$\text{互能量谱定义 } E_{xy}(f) = \mathcal{F}[R_{xy}(\tau)]$$

$$\text{互功率谱定义 } P_{xy}(f) = \mathcal{F}[R_{xy}(\tau)] \quad (\text{两种定义不一致})$$

$$E_{xy}(f) = X^*(f) Y(f), \quad R_{xy}(\tau) = R_{yx}^*(-\tau) \xrightarrow{\text{real}} R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau)$$

④ 实信号 $\Rightarrow$ 功率谱偶 $\Rightarrow$ 功率谱/能量谱实偶 $\Rightarrow$ 单边谱.

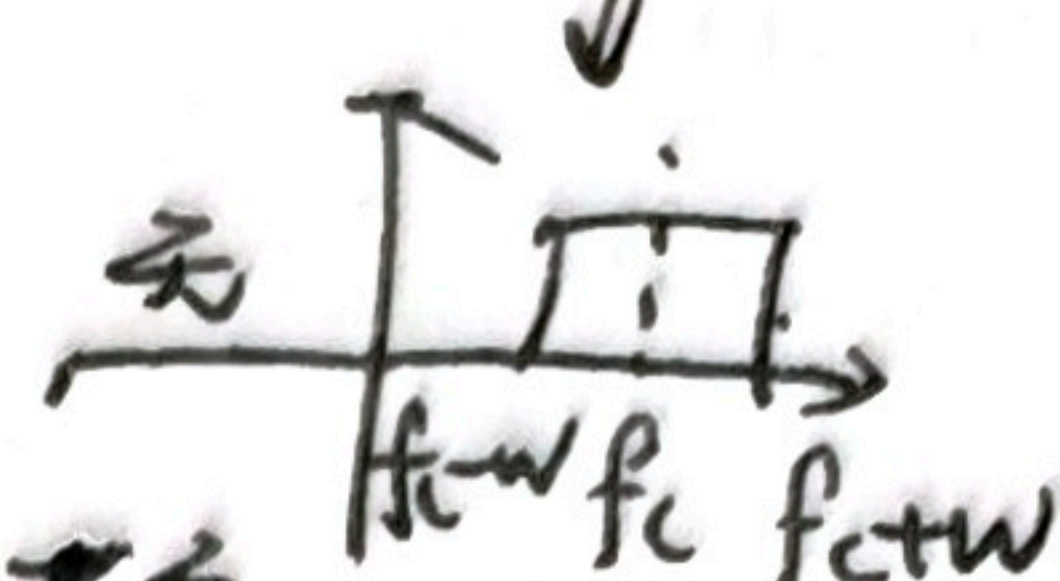
$$P_x(f) = 2P_x(f), f \geq 0.$$

⑤ 带宽.

带宽定义只与信号频谱的带宽部分.



$$\Rightarrow B=W$$



$$B=W.$$

对于普通通信基带信号 (大部分通信的信号), 都是偶对称的, 带宽只与信号频率.

Define
带宽

绝对带宽, 主瓣带宽, 3dB带宽 $\Rightarrow P_x(W) = \frac{1}{2}P_x(0)$, 功率占北带宽

$$\frac{\int_{-W}^W P_x(f) df}{\int_{-\infty}^{\infty} P_x(f) df} = \text{pp\%}.$$

近似矩形带宽 $\Rightarrow W = \frac{\int_{-W}^W P_x(f) df}{2P_x(0)}$ 大部分情况下, $P_x(W)$ 在 $P_x(f)$ 中最大.

3. LTI System.

$$x \rightarrow \boxed{H} \rightarrow y, \text{ 有 } E_y(f) = |Y(f)|^2 = E_x(f) |H(f)|^2, P_y(f) = \frac{|H(f)|^2}{T} = P_x(f) |H(f)|^2$$

Define
Hilbert
Transform

$$\hat{x}(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t}, \quad \hat{x}(f) = -j \operatorname{sgn}(f) x(f).$$

用于对实信号使用 Hilbert 变换构造解析信号, 消除负频率分量.

Property

$$|H(f)|^2 = |-j \operatorname{sgn}(f)|^2 = 1, \Rightarrow E_{\hat{x}}(f) = E_x(f), P_{\hat{x}}(f) = P_x(f) \Rightarrow R_{\hat{x}}(\tau) = R_x(\tau).$$

则 Hilbert 变换不改变功率谱和功率, 但 $\langle x(t), \hat{x}(t) \rangle = \langle x(f), \hat{x}(f) \rangle = 0$.

Define

解析信号.

$$z(t) = x(t) + j \hat{x}(t), \text{ 只有正频率分量 } 2x(f), \text{ 反之, 只有负频率分量则为解析信号}$$

Remark

$$\cos(2\pi f_c t) \xrightarrow{\pi} \sin(2\pi f_c t), \sin(2\pi f_c t) \xrightarrow{\pi} -\cos(2\pi f_c t).$$

$$\text{对于 } \cos(2\pi f_c t + \phi) \xrightarrow{\pi} x(t) \cos(2\pi f_c t) \xrightarrow{\pi} x(t) \sin(2\pi f_c t), x(t) \sin(2\pi f_c t) \xrightarrow{\pi} -x(t) \cos(2\pi f_c t).$$

具有相位差 ϕ 使用 Define 出发, $E_z = |x(t) + j \hat{x}(t)|^2 = |x(t)|^2 + |\hat{x}(t)|^2$

如 $\cos(2\pi f_c t + \phi)$

$$E_z = E_x + E_{\hat{x}}(z) = 2E_x.$$

$\Rightarrow \sin(2\pi f_c t + \phi)$

奇信号 $\Rightarrow$ 偶信号, 偶信号 $\Rightarrow$ 奇信号.

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= m(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) \\ x(t) &= \operatorname{Re}\{m(t) e^{j(2\pi f_c t + \phi)}\} \\ &= \operatorname{Re}\{m(t) e^{j\phi} e^{j2\pi f_c t}\} \end{aligned}$$

4. 带通信号与带通系统.

① Define

复信号.

$x_L(t) = z(t) e^{-j2\pi f_c t} = [x(t) + j \hat{x}(t)] e^{-j2\pi f_c t}$
一种快速采样信号的方法, $h(t) = \operatorname{Re}\{h_L(t) e^{j2\pi f_c t}\}$ (对 $h(t)$ 中的三角函数进行复数化简)

Property

$$x_L(f) = z(f + f_c) \Rightarrow P_{x_L}(f) = P_z(f + f_c) = \begin{cases} 4P_x(f + f_c), & |f| \leq f_c \\ 0, & \text{other.} \end{cases} \quad \left(\begin{aligned} & \checkmark x_L(t) \\ & \checkmark \end{aligned} \right)$$

使用反解以及 $x_L(f)$ 的共轭对称性, $P_x(f) = \frac{1}{4} P_{x_L}(f) + \frac{1}{4} P_{x_L}(-f - f_c)$.

$x_L(f)$ 是 $x(f)$ 的二倍 (正频率轴) 并搬移到基带, $x(f)$ 是 $x_L(f)$ 搬移到频率,

$x(-f)$ 搬移到频率轴, 再除以 2. ($x(f) = \frac{1}{2} x_L(f) + \frac{1}{2} x_L^*(-f - f_c)$).

②

$x(t)$ 为带通信号:

$$x(t) = \operatorname{Re}\{x_L(t) e^{j2\pi f_c t}\} = x_c(t) \cos(2\pi f_c t) - x_s(t) \sin(2\pi f_c t), \quad x_L(t) = x_c(t) + j x_s(t).$$

如以便把一个带通信号 (带通) 用两个基带信号进行表示.

③

$Y(f) = X(f) H(f)$. (带通), 处理带通信号, 可以先通过基带处理, 再用 $\operatorname{Re}\{y_L(t) e^{j2\pi f_c t}\}$ 回带通.

$$\Rightarrow Y_L(f) = X_L(f) \frac{H(f)}{2} = X_L(f) H_L(f), \quad y_L(t) = x_L(t) * h_L(t).$$

5. 不失真系统 (Distortionless system)

Define
波形不失真

$y(t) = a s(t - t_0)$ 只有幅度的线性变化和时延, 则该波形不失真
此时 $H(f) = a e^{-j2\pi f t_0}$, $|H(f)| = \text{constant}$, $\angle H(f)$ 是过原点的直线.
定义时延特性: $\tau(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\angle H(f)}{f} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\phi(f)}{f}$ 与 f 无关.

Define:
复包络不失真

$y(t) = h(t) * s(t)$, 对 $H(f)$ 来说, $|H(f)| = \text{constant}$ 且 $\angle H(f)$ 是一条直线, 则系统复包络不失真. 定义群时延 $\tau_g(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(f)}{df}$, $\angle H(f)$ 是一直线则 $\tau_g(f)$ 为常数.
(复包络不失真, 那信号的复包络满足波形不失真, $y_L(t) = k s_L(t - t_0)$).

二. 随机过程

1. 随机过程的矩

Origin, Center, Mixed Moment.

独立 $\Rightarrow$ 不相关 $\Rightarrow E[X(t)Y(t)] = E[X(t)]E[Y(t)]$
 $\text{Cov}(X, Y) = 0$, $E[X(t)Y(t)] = E[X(t)]E[Y(t)]$
 ~~$E[X(t)Y(t)] = 0$~~

2. 平稳随机过程

$\Rightarrow$ 相关函数只与时间差有关, 但大部分情况含折衷信号.

① $E[X(t)] = \text{constant}$, $E[X^*(t)X(s)]$ only depend on $(t-s) \Rightarrow \text{W.S.S.}$

② Ergodicity

Define 均值遍历: $P(\bar{X}(t) = m_x) = 1$, where $\bar{X}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt$.

ergodicity. 自相关遍历: $P(\overline{X(t)X(t+\tau)} = R_x(\tau)) = 1$, where, $\overline{X(t)X(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t)X(t+\tau) dt$

③ 如果 W.S.S., 均值遍历且自相关遍历, 则该 W.S.S. 遍历.

Define
联合平稳

$X(t), Y(t)$ W.S.S., 且 $E[X(t)Y(t+\tau)]$ 与 t 无关, 则 $X(t), Y(t)$ 联合平稳.

④ PSD of W.S.S.

Define $P_X = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E|X(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{E|X(f)|^2}{T} df \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T P_X(f) df$

Where the PSD $P_X(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E|X(f)|^2}{T}$

Property

Real S.P. $\Rightarrow$ 实偶相关 $\Rightarrow$ 实偶 P.S.D. $|R_X(\tau) \leftrightarrow P_X(f)|$ (for W.S.S.)

任何一 S.P. 都可分解为 $Y(t) = X(t) + m_X(t)$, $X(t)$ 为 0 均值 S.P., m_X 为 $Y(t)$ 均值.

* $P_Y(f) = P_X(f) + P_{m_X}(f)$. (m_X 为 general 为一个确定 function) $\rightarrow$ 确定功率.

⑤ W.S.S. 的 Filter

Property

W.S.S. 的 Filter 依然为 W.S.S., 且 $X(t), Y(t)$ 联合平稳.

与确定信号一致 $|P_Y(f) = |H(f)|^2 P_X(f)|$

~~$R_{XY}(f)$~~ $R_{XY}(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau)$, 则 $P_{XY}(f) = R(f) H(f)$.

Remark 1.

W.S.S. $\rightarrow$ Hilbert, $X(t) \rightarrow \hat{X}(t)$.

$R_{X\hat{X}}(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) \triangleq \hat{R}_X(\tau)$. (卷积-trick).

通过该 trick 可以证明 $R_{X\hat{X}}(\tau)$ 为奇函数, 不过这都不重要.

重要的是, $R_X(\tau)$ 为实偶, $\hat{R}_X(\tau)$ 为奇, 再取 $R_{X\hat{X}}(\tau) = \hat{R}_X(\tau)$ 和 $R_{\hat{X}X}(\tau) = -\hat{R}_X(\tau)$

可以解决所有 Hilbert 变换相关的问题.

Remark 2 与确定信号一样, $|H(f)| = 1$ (Hilbert), $P_X(f) = P_{\hat{X}}(f)$, $R_X(f) = R_{\hat{X}}(f)$.

⑥ 行循环平穩

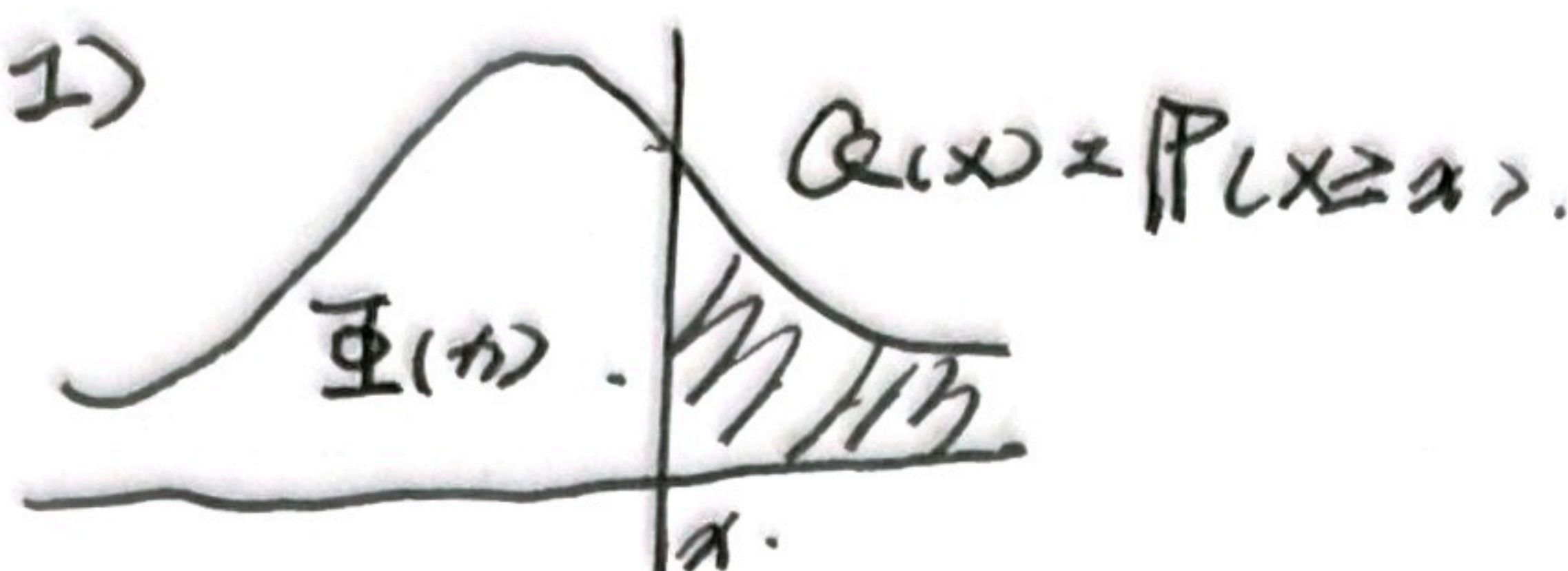
由 <时平均> 过程 (时平均) 转化为 W.S.S., 再求 PSD.

$$\exists T, \text{ such } R_{xx}(z, s) = R_{xx}(z+T, s+T), m_x(t) = m_x(t+T).$$

3. Gaussian process.

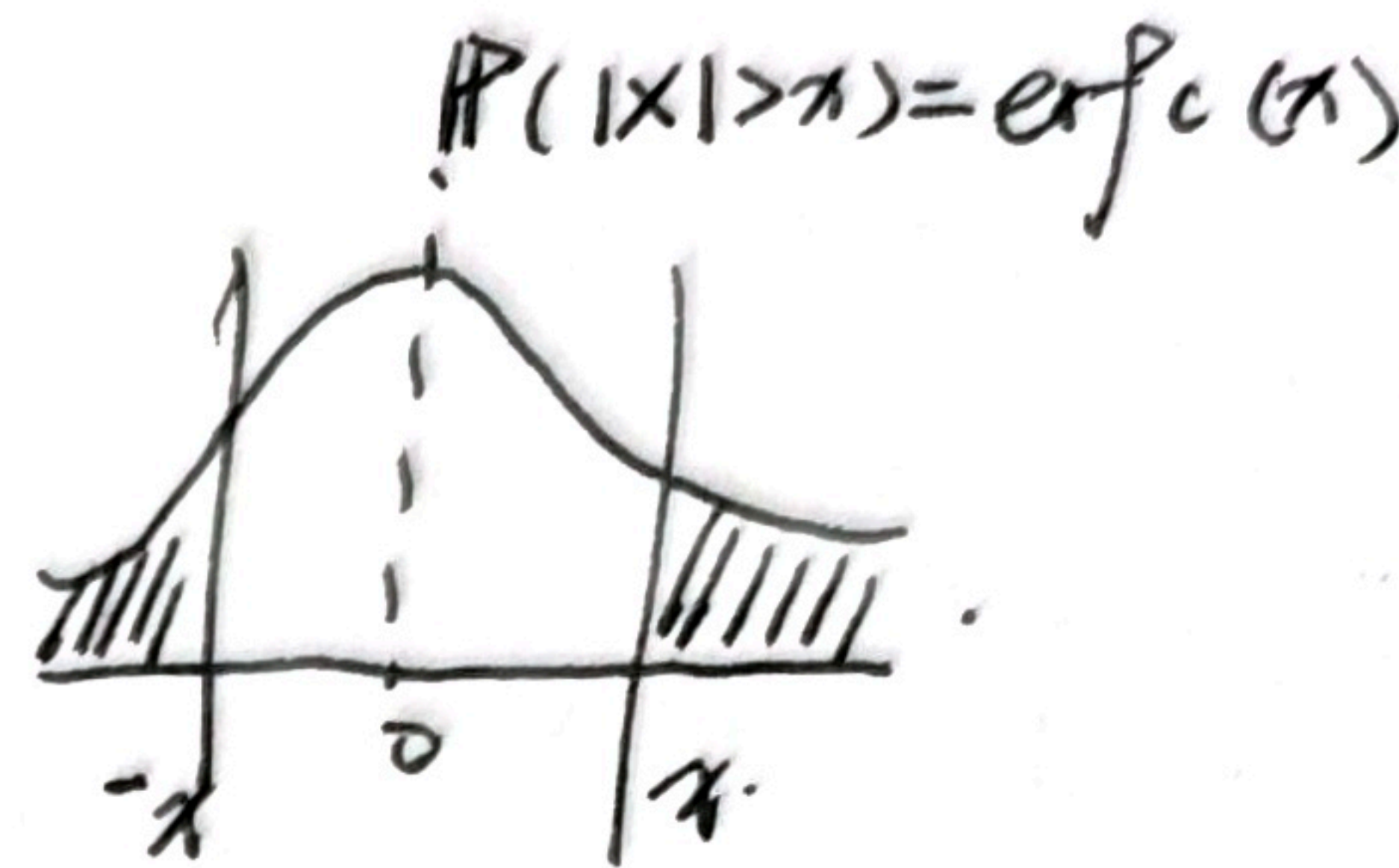
① Gauss Distribution.

$$X \sim N(0, 1)$$



$$X \sim N(0, \frac{1}{2})$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2 \cdot \frac{1}{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2)$$



② Gaussian process.

Define A s.p. $X(t)$, $\forall t, \forall n \in \{t_n\}_{n=0}^{\infty}, \{X(t_n)\}_{n=0}^{\infty}$ 联合 Gauss.

Property Gauss process 与 确定信号 $m(t)$ 相加后依然为 Gauss process.

Gauss process 与 确定信号 $m(t)$ 差值后依然为 Gauss process.

4. Gauss White Noise.

Define $P_n(f) = \frac{N_0}{2}, E n(t) = 0$, 称 s.p. $n(t)$ 为 Gauss 白噪声, $b^2 \rightarrow \infty$.

① Gauss White Noise 滤波器.

$$n_w(t) \rightarrow [h(t)] \rightarrow n(t), n(t) = \int n_w(t-\tau) h(\tau) d\tau.$$

$$P_n(f) = |H(f)|^2 P_{nw}(f) = \frac{N_0}{2} |H(f)|^2, P_n = \int P_n(f) df = \frac{N_0}{2} E_h.$$

不同子频带上的 Gauss White Noise 相互独立 (支撑集不相交, 相关为 0).

② Gauss White Noise 与 确定信号的内积.

Define $z = \int n_w(t) f(t) dt$, $n_w(t)$ 在 $f(t)$ 上的投影.

③ Gauss White Noise 带通滤波器 (窄带噪声信号)

白噪声化后, 对一个平稳 s.p. 信号进行滤波.

Define 同确定信号多折一折, $z(t) = x(t) + j \hat{x}(t)$.

多折.

$x(t) + j \hat{x}(t)$, 可看作 $x(t)$ 过频域 $H(f) = 1 + jS(f)$ 的滤波器. $R_z(f) = \begin{cases} 4P_n(f), & f > 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases}$

Remark 1.

同确定信号多折一致, 也可利用 Hilbert 变换 (s.p. 滤波器) 的相乘知识算 $E[z^*(t) z(t+\tau)]$, 即 $z(t)$ 的自相关.

Remark 2.

$z(t)$ 与 $z^*(t)$ 不相关 (共轭不相关) $E[z^*(t) z(t+\tau)] = E[z(t) z(t+\tau)] = 0$.

特别: 白噪声.

因为 $z(t)$ 可看作 $x(t)$ 过 $H(f) = 1 + jS(f)$ 的滤波器 对 $z(t)$ 的 $H(f) = 1 + jS(f)$, 二者支撑集不相交, 由 Parseval 定理 (3.4.12) 分析 $n(t)$ 过 Filter 的相关情况, 不同子频带独立. $(z(t) \& n_c(t))$. 由 $n_c(t) = z(t) e^{-j\omega_c t}$, $E[n_c^*(t) n_c(t)] = 0$, 即 $n_c(t)$ 与 $n_c^*(t)$ 不相关.

Remark 3. 关于同相分量与正交分量.

$x(t)$ Gauss 平稳, $x_c(t)$, $x_s(t)$ Gauss Joint W.S.S.

$x_c(t)$, $x_s(t)$ 同时刻不相关, $R_{cs}(0) = 0$.

$$R_{x_c}(f) = R_{x_s}(f), \quad P_{x_c}(f) = P_{x_s}(f),$$

$R_{x_c}(0) = R_{x_s}(0) = R_x(0)$, 即 $x_c(t)$, $x_s(t)$, $x(t)$ 功率相同.

$$P_{x_c}(f) = P_{x_s}(f) = \begin{cases} P_x(f-f_c)u(-f+f_c) + P_x(f+f_c)u(f+f_c) \\ 0 \end{cases}, \text{ otherwise.}$$

即 $x_c(t)$, $x_s(t)$ 的 PSD 是 $x(t)$ 的 PSD 正负频, 负频都移到基频处, 已验证了.

$$\int P_{x_c}(f) df = \int P_{x_s}(f) df = \int P_x(f) df, \quad R_{x_c}(0) = R_{x_s}(0) = R_x(0).$$

5. Match Filter

Object 使初采样点时的瞬时 $\left(\frac{S}{N}\right)_T = \frac{y^2(T)}{E[n^2(T)]}$ 最大.

应设计 $h(t) = K\delta(T-t_0)$, T 一般为 $S(t)$ 最大的有效支持采样间隔点, 即高以使得 Filter 因果, K 一般为 1.

Property $\left(\frac{S}{N}\right)_{\max} = \frac{2}{N_0} E_s$, 即输出最大(瞬时) (瞬时) 只与 E_s 有关.

Remember $\left(\frac{S}{N}\right)_t = \frac{1}{\text{const} E_n} \left(\int S(t) h(t-t) dt \right)^2 \leq \frac{1}{C \cdot E_n} E_n \int S^2(t) dt = \frac{1}{C} \cdot E_s$.

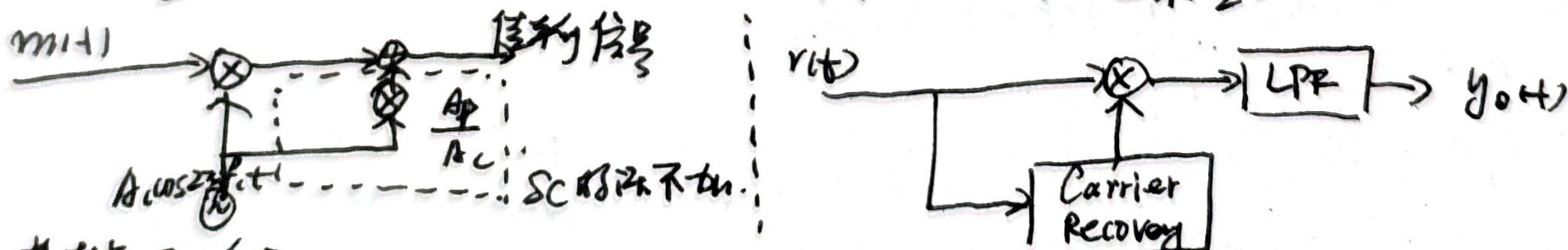
三. 模拟信号调制系统.

A. 幅度调制

1. 双边带抑制载波幅度调制 DSB-SC. $A_c m(t) \cos(2\pi f_c t) + A_p \cos(2\pi f_c t)$.

$w(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) m(t)$ 加频率 $A_c (1+m(t)) \cos(2\pi f_c t)$, 载频用升压变压器相位解调.

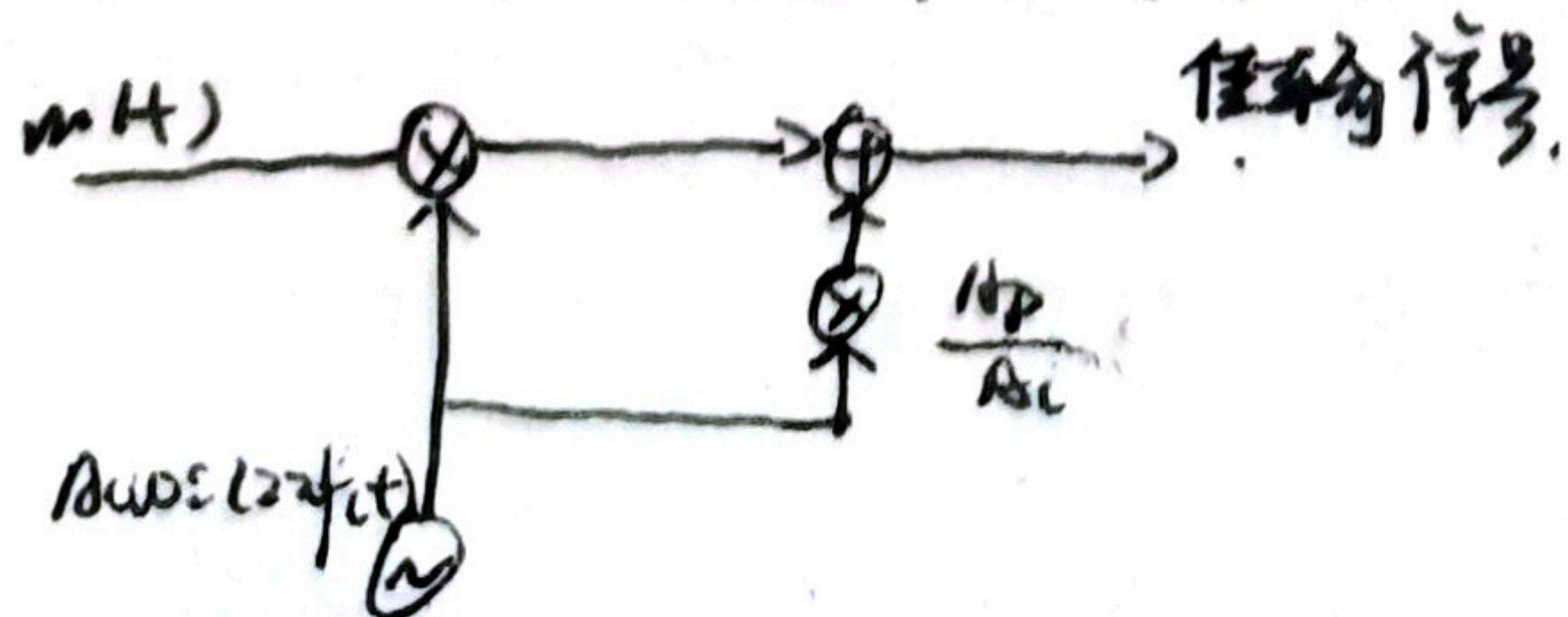
$P_n = \frac{A_c^2 P_m}{2}$ (信号中的正弦波, 在功率中的表现时减半).



若载波与接收端 $m(t)$ 时, 相关为循环平稳 $\langle w(t) \rangle$, 先时平均再算即可.

2. 常规幅度调制 DSB-LC (AM) 大载波.

$w(t) = A_c [1 + a m(t)] \cos(2\pi f_c t)$, where $m(t) = \frac{m(t)}{\max|m(t)|}$, a 为调制系数, 由于 AM 解调是提取包络(简单), 所以要求 $a < 1$, 也可以 $A_c (m(t) + \frac{1}{a}) \cos(2\pi f_c t)$ 对包络解调.



解调时, 可以相干解调, 也可以过包络检波, 提取包络. (a 为调制系数).

整流 + LPF + 增益.

$$P_n = \frac{A_c^2}{2} (1 + \alpha^2 P_{mn}), \text{ 效率 } \eta = \frac{\frac{A_c^2}{2} \alpha^2 P_{mn}}{\frac{A_c^2}{2} (1 + \alpha^2 P_{mn})} = \frac{\alpha^2 P_{mn}}{1 + \alpha^2 P_{mn}}; P_{mn} = \frac{P_m}{(\max |m(t)|)^2}$$

平衡 $m(t)$ 过调制循环平衡 (Cyclostationary).

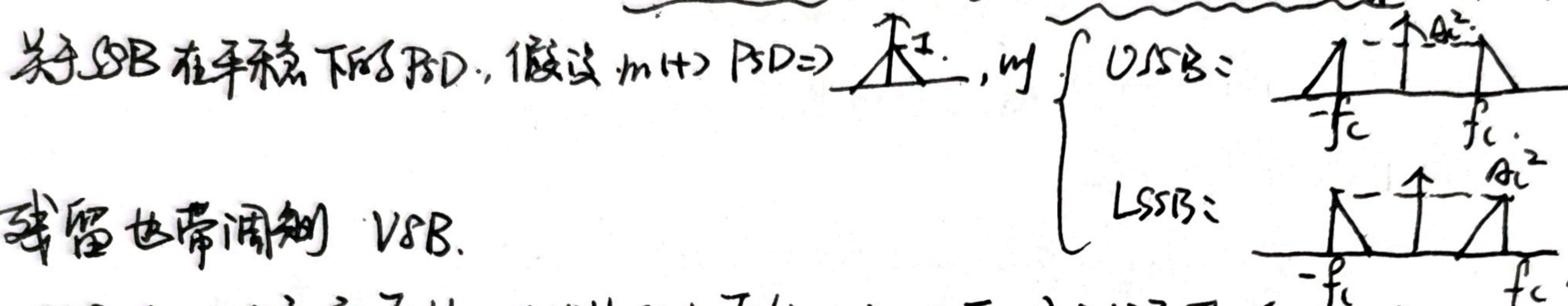
3. 单边带调制, SSB-AM.

DSB-SC, DSB-LC (AM) 都需 2W 带宽, 上边带 ($f > f_c$) 和下边带 ($f < f_c$) 都包含了相同的信号, 自然有浪费减少边带.

$$\text{SSB-AM: } u(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t) \mp A_c \hat{m}(t) \sin(2\pi f_c t) \quad \frac{V_{SSB}}{L_{SSB}}$$

通过该表达式可以构造 SSB-AM 的发射调制器.

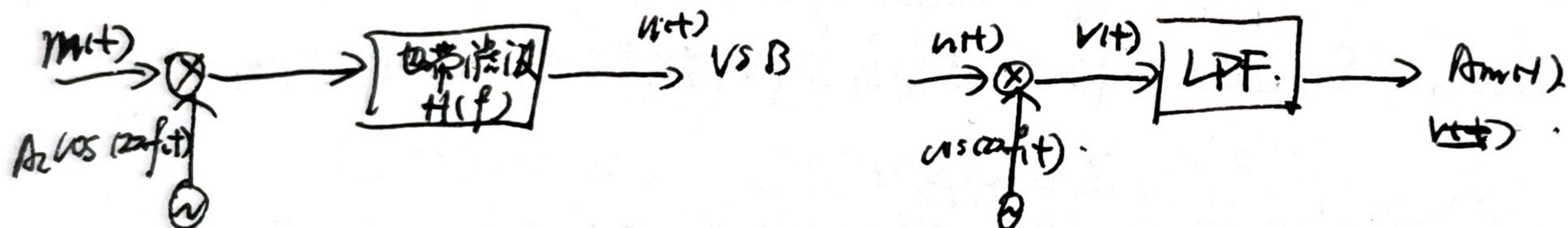
SSB-AM 的解调可通过相干解调器, 也可用大载波包络检波 (载波频率大于 $m(t)$)



4. 残留边带调制 VSB.

SSB AM 对高通 Filter (Hilbert Filter) 的要求太高, 易实现困难.

是否可以将其替换为其他类型的 filter.

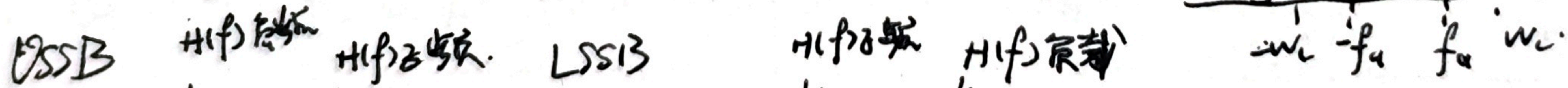


使用系数连接整个发射接收过程, $V(f) = \frac{1}{2} m(f) [H(f-f_c) + H(f+f_c)]$

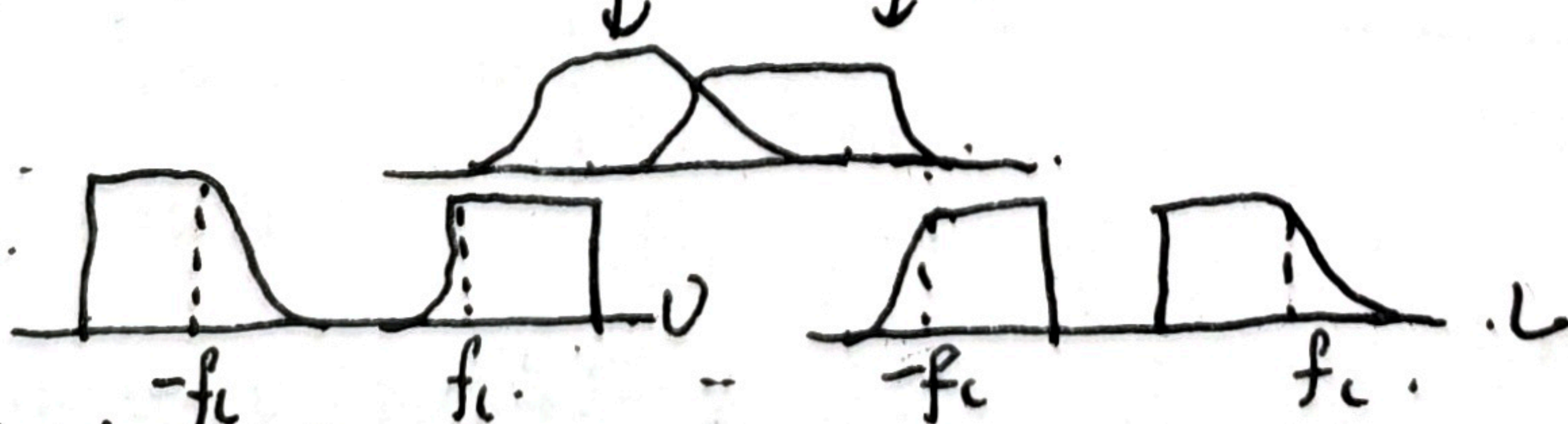
所以, 只要 $H(f-f_c) + H(f+f_c) = \text{constant}$ ($|f| < W$), 通过 LPF 后 $m(f)$ 就不会失真.

即 $H(f)$ 关于 f_c 对称, where $f_c - f_u < f < f_c + f_u$. (f_u 作截止频率, 任意 $f_u < W$)

直观理解, $H(f-f_c) + H(f+f_c)$ 就是左右边带移到基带



二者在图上类似对称.



B. 相位调制与频率调制 (角度调制).

1. FM 与 PM 的表示形式.

角度调制信号 $\Rightarrow u(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \phi(t))$, $\phi(t) = \begin{cases} k_p m(t), & \text{PM} \\ 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(t) dt, & \text{FM} \end{cases}$

ans, 将 $\frac{d}{dt} m(t)$ 送入 FM, 则等效于 PM.

将 $\int m(t) dt$ 送入 PM, 则等效于 FM.

Define 调制指数. $\beta_p = k_p \max|m(t)| = \Delta \phi_{max}$.
 $\beta_f = \frac{k_f \max|m(t)|}{f_m} = \frac{\Delta f_{max}}{W} \rightarrow$ 信(消息)带宽.

2. 角度调制的频率特征.

假设信号 $m(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t))$, 称 $m(t)$ 为调制信号.

Process 频域. $m(t) = \text{Re}\{A_c e^{j2\pi f_c t} e^{j\beta \sin(2\pi f_m t)}\}$
 由于是开且特殊函数. $e^{j\beta \sin(2\pi f_m t)} = \sum_n J_n(\beta) e^{j2\pi n f_m t}$

$$u(t) = \text{Re}\{A_c \sum_n J_n(\beta) e^{j2\pi(f_c + n f_m)t}\}$$

$$= \sum_n A_c J_n(\beta) \cos(2\pi(f_c + n f_m)t)$$

所以, 已调信号的频域 (频率是 $f_c + n f_m, n \in (-\infty, +\infty)$) 是无限制的, 即. 已调信号带宽无限.

Define 带宽. 由于 $u(t) = \sum_n A_c J_n(\beta) \cos(2\pi(f_c + n f_m)t)$ 带宽无限, 所以在传输角度调制信号时, 我们分析其等效带宽, 即在信号传输过程中的带宽, 由 Carson 公式给出:

$$B_c = 2(\beta + 1)f_m, \text{ where } f_m \text{ 为 } m(t) \text{ 的 (正弦) 频率.}$$

值得注意的是, Carson 公式为任意角度调制信号的带宽都适用, 即.

$$B_c = 2(\beta + 1)W, \text{ } W \text{ 为 } m(t) \text{ 的带宽.}$$

Remark β 与信号的振幅直接挂钩, 增大了振幅, 已调信号的占用带宽会变大.

3. 角度调制的实现.

由于角度调制后出现了全新的频率, 所以角度调制的调制器不是 LTI 系统. 时变非线性.

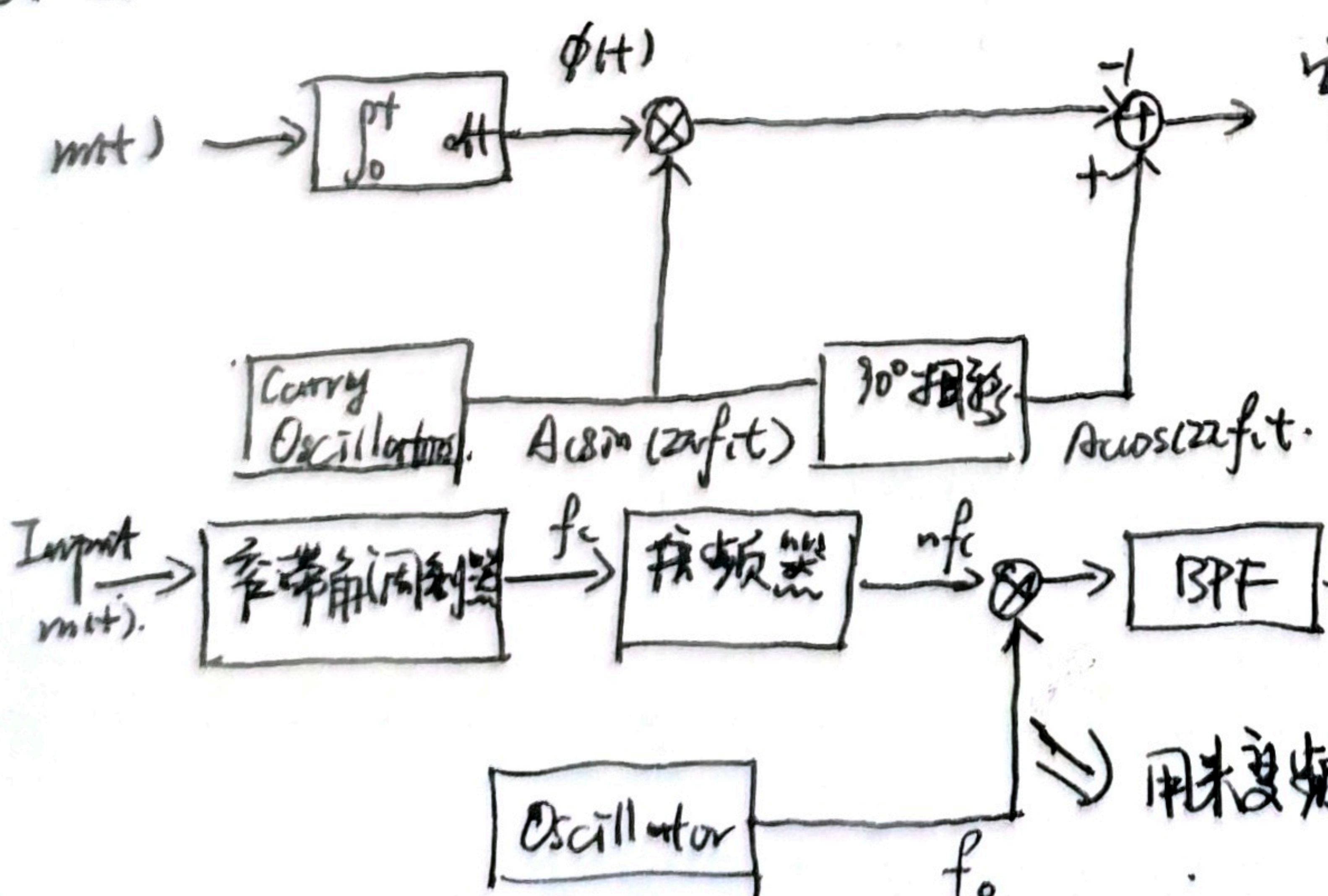
① 角度调制器.

Method 1: Voltage Controlled Oscillator (VCO): VCO 对 $m(t)$ 的作用在 $m(t)$ 的“幅度”控制. 正弦波的“相位”.



输出瞬时频率为 $f_i = f_c + k_f m(t)$.
 则输出正弦波为
 $u(t) = A \cos[2\pi \int_{-\infty}^t f_c + k_f m(t) dt]$
 (不严格)
 $= A \cos[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(t) dt]$

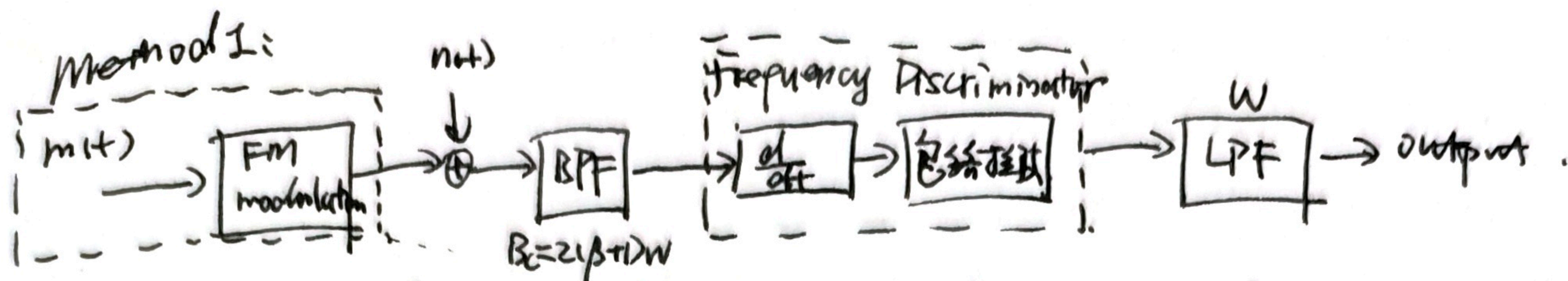
Method 2:



窄带信号 $A_c \cos(2\pi f_c t) - A_c \sin(2\pi f_c t) \phi(t)$.
 ($\phi(t) \ll 1$ 时的近似, 无问题)
 产生各带已调信号

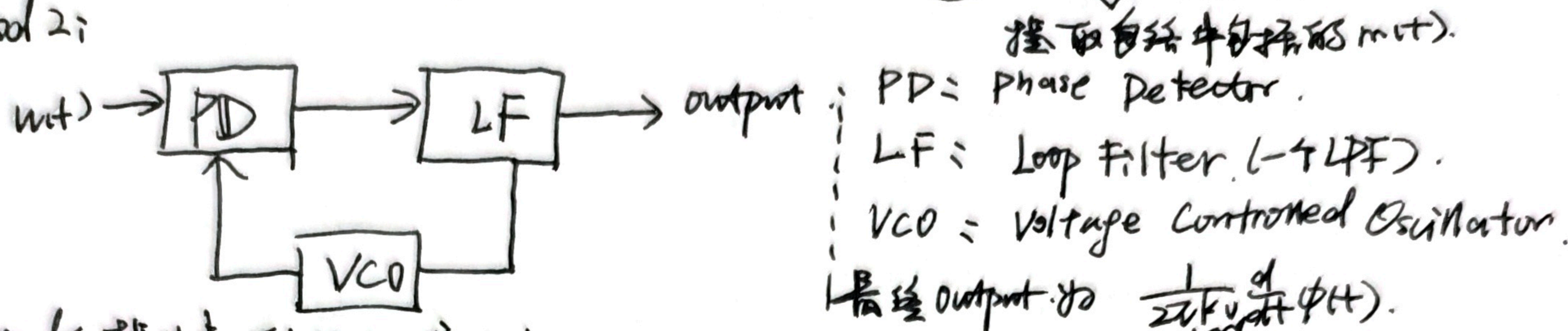
由于 Output 是宽带角调制 (FM) 已调信号. 对于这两种调制器, 都产生 FM 信号, 若把 $m(t)$ 做微分再通过这两种调制器, 则产生 PM 信号.

② 角调制解调器.



$$u(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(z) dz) \quad \frac{d}{dt} u(t) = A_c (f_c + 2k_f m(t)) \cos(\dots)$$

Method 2:



Method 1 提出来一般幅值会变化, 还会被抬高, 效果一般. $\hookrightarrow$ k_f 参考设计.

PLL 可以较准确地恢复 $m(t) = \frac{1}{2k_f} \frac{d}{dt} \phi(t)$.

C. 调制与解调中的噪声分析.

研究指标: $\frac{S}{N}$, $G = \frac{S_o/N_o}{S_i/N_i}$ (Demodulator 的输出信噪比 / 输入信噪比).

1. DSB-SC AM (两倍带宽).

$$r(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t) + n(t) = (A_c m(t) + n_c(t)) \cos(2\pi f_c t) - n_s(t) \sin(2\pi f_c t)$$

留下同相分量, 解调出 $y(t) = \frac{1}{2} (A_c m(t) + n_c(t))$.

$$P_y = \frac{A_c^2}{4} P_m + \frac{1}{4} P_{n_c}, \text{ where } P_{n_c} = P_{n_s} = \frac{N_0}{2} 2W = 2N_0W.$$

$$P_o = \frac{A_c^2}{4} P_m, \quad \left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{\frac{1}{4} A_c^2 P_m}{\frac{1}{4} 2N_0W} = \frac{P_r}{N_0W}, \quad \left(\frac{S}{N}\right)_i = \frac{P_r}{\frac{N_0}{2} 2W} = \frac{P_r}{N_0W}.$$

$$G = \left(\frac{S}{N}\right)_o / \left(\frac{S}{N}\right)_i = 2.$$

补充: 对于一个普通基带系统, $\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{P_r}{\frac{N_0}{2} 2W} = \frac{P_r}{N_0W}$, $\left(\frac{S}{N}\right)_i = \frac{P_r}{N_0W}$.

DSB-SC 相当于普通基带系统未改善.

2. SSB-AM (一倍带宽)

同分析 DSB-SC 一样, $\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{P_r}{N_0W}$, $\left(\frac{S}{N}\right)_i = \frac{P_r}{N_0W}$, $G = \left(\frac{S}{N}\right)_o / \left(\frac{S}{N}\right)_i = 1$.

一种理解式: SSB-AM 不仅在解调中过滤了一部分噪声, 也过滤了一部分信号, G 为 1.

DSB-SC 在解调中只过滤了噪声 (部分), G 为 2.

3. 常规 AM (两倍带宽) (注意带宽).

P_r 为接收功率, 与发射功率和衰减有关, 与信道噪声无关.

分析: $\left(\frac{S}{N}\right)_o = \eta \left(\frac{S}{N}\right)_i$, $\left(\frac{S}{N}\right)_i = \frac{P_r}{2W \frac{N_0}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{S}{N}\right)_o$, $G = 2\eta$ (η 小于 1 且与调制指数有关).

包络检波: A_c 远大于噪声时, $y(t) = A_c a(m(t)) + n(t)$, 效果与调制一致.

A_c 不远远大于噪声时, 系统工作在门限之下, 分析 $\left(\frac{S}{N}\right)$ 无意义.

4. 角调制.

在近似推导 $\frac{S}{N}$ 的过程中, 我们会发现, 信号电平越高, 噪声电平越低. (反比).

对于 AM 调制, AM 信号强弱与噪声强弱无关.

解调前通过低通 Filter 后, $S_{no}(f) = \begin{cases} \frac{N_0}{A_c^2}, & P_m \\ \frac{N_0}{A_c^2} f^2, & F_m \end{cases} \text{ where } |f| < W, \text{ otherwise.}$

则有 $P_{no} = \int S_{no}(f) df = \begin{cases} \frac{N_0}{A_c^2} \cdot 2W, & P_m \\ \frac{N_0}{A_c^2} \int_{-W}^W f^2 df, & F_m. \end{cases}$

过滤波后的信号可看作 $y(t) = \begin{cases} k_p m(t) + y_n(t), & P_m \\ k_f m(t) + \frac{d}{dt} y_n(t), & F_m. \end{cases}$

信噪比 $(\frac{S}{N})_0$ 有 $(\frac{S}{N})_0 = \begin{cases} \beta^2 P_{mn} (\frac{S}{N})_b, & P_m \\ 3\beta_f^2 P_{mn} (\frac{S}{N})_b, & F_m. \end{cases}$

Remark 角调制的 $(\frac{S}{N})_0$ 都与 β^2 成正比, 但 β 不可无限增大, 因为 β 增大到一定值, 近似分析就不再存在, β 增大, Carson 带宽增大, 以带宽换高 SNR.

5. 门限效应.

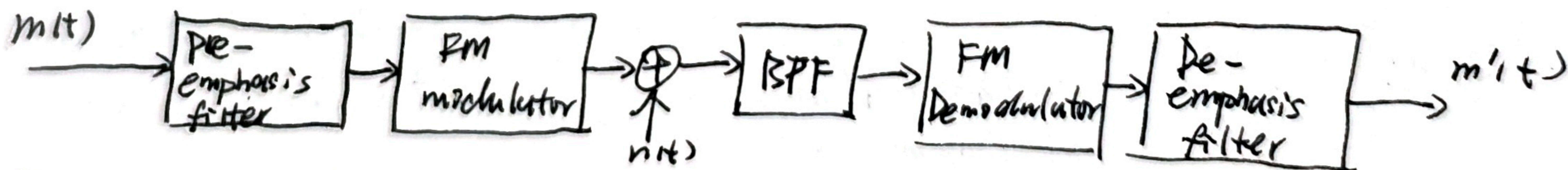
Threshold Effect. (Non coherent de modulation 出现).

$\max \times \beta$
s.t. $\frac{P_R}{N W_0} = (\frac{S}{N})_b \geq \alpha(\beta+1).$

即 β 不可无限大, 否则会有 Threshold effect.

6. 预加重和去加重.

FM 的 PSD (噪声) 为二次型, 低频噪声小, 高频大, 自然有办法在低频处用 PM, 高频处用 FM.



Pre-emphasis filter: 低频衰减, 高频放大 $\Rightarrow$ 高通.

De-emphasis filter: 低频放大, 高频衰减 $\Rightarrow$ 低通.

另一种解释, 为了使 FM 的高频 SNR 增大, 预先放大信号的高频分量, 解调后再将高频分量缩小至原样.

7. Frequency-Division Multiplexing

频分复用, FDM.

将信道带宽划分为 many non overlapping small cells, each cell can smoothly pass through one signal.

四. 数字信号的基本传输

1. 基础描述

2进制信号传输速率: R_b (bits/s), 周期 T_b (s), $R_b = \frac{1}{T_b}$.

M进制信号符号元(符号)速率: $\frac{R_b}{\text{每位}} \text{ (Symbol/s)}$, R_s (Bd), $R_s = 1/T_s$.

速率转换: $M=2^k$, $T_s = \frac{T_b}{k}$, (k 个2进制symbol才构成一个M进制symbol)

2. Pulse Amplitude Modulation (PAM).

① 基础表示及分类.

$$\sum_k b_k \delta(t - kT_b) \xrightarrow[\text{M进制}]{\text{转换为}} \sum_k a_k \delta(t - kT_s) \xrightarrow[\text{波形}]{\text{PAM}} s(t) = \sum_k a_k \delta(t - kT_s) * g_T(t) = \sum_k a_k g(t - kT_s).$$

PAM信号又分两种型, 由 a_n 和 $g_T(t)$ 共同决定.

码型类型:

Unipolar NRZ, Unipolar RZ, Bipolar NRZ, Bipolar RZ.

差分码(相对码). 绝对码: 1, 0. 相对码: 1, 0. 先给一个相对码, 然后与绝对码不断进行模2加.

(用差分码形成的PAM可以分 Unipolar, Bipolar, 以及 NRZ, RZ).

② PAM的PSD计算.

$$s(t) = \sum_n a_n g_T(t - nT_s).$$

$$P_s(f) = \frac{1}{T_s} P_a(f) P_g(f), \text{ where } P_a(f) = \sum_n a_n e^{-j2\pi f n T_s}, P_g(f) = |G(f)|^2.$$

Bipolar, Unipolar NRZ 主瓣带宽为 $R_b = 1/T_b$.

Bipolar, Unipolar RZ 主瓣带宽为 $2R_b = 2/T_b$.

原因是因为 $G(f)$ 不同, 被调制信号的差别.

$P_s(f)$ 由 $\{a_n\}$ 的相关性和 $|G(f)|^2$ 确定, 必须统一分析.

③ 常用线路码型.

由于信道一般不利于0和1, 上述简单信号几乎都无法传输, 信道要求:

a) 线路码的PSD特性应满足基带信道的 frequency 特性.

b) 尽量减小线路码的高频分量, 且尽量不含直流分量, 减少低频分量.

另外, 为了便于接收, 码元信号中有(或可以简单变换出)高频的时钟分量, 且提取过程尽量不受 symbol 统计特性影响(一大串0, 一大串1).

1) AMI (Alternate Mark Inversion).

RZ波形特点, 0 → 0, 1 → 1/-1 交替出现. 主瓣带宽 $R_b = 1/T_b$.

2) HD B₃ Code (High Density Bipolar of Order 3).

AMI.

将AMI中连续的4个0, 换为0001, 与第5个1交替出现, 后面的1反码交替.

如果未能成功破坏反码规则, 将00V换为000V, 05V- (B码脉冲符号反码交替).

③ HDB₃ (High Density Bipolar of Order 3).

编码步骤:

1. 判各4连0.
2. 确定第一个非零码 (一直向下确定, 直到遇到可以确定为V的时候).
3. 第一个四连零最后一位与第一个非零码相同 (每发生第一个非零, 就是V之前的第一个) 相同.
4. 可4连零 000V, V与第一个非零码相同, 随后, 依次确定所有4连0的V, V, -V交替出现.
5. 再继续AMI编码 (注意, V的有在会影响AMI编码).
6. 检查V是否与前一相同 (非零), 如果不同, 在前一个非零后补B, B与前一相反.

Remark. 1. V与前一非零码相同, B与前一非零码相反.

example. 1111 0000 1 0000 11 0000 0000 11 ①

1-1-1-1 0000 1 0000 11 0000 0000 11 ②

1-1-1-1 000-V 1 000V 11 000-V 000V 11 ③

1-1-1-1 000-V 1 000V -1 1 000-V 000V -1 1 ④

1-1-1-1 000-V 1 000V -1 1 -B 00-V B 00V -1 1
相同, 补0 相同, 0 相反, 补一个相反的B
不同, 补一个相反的B.

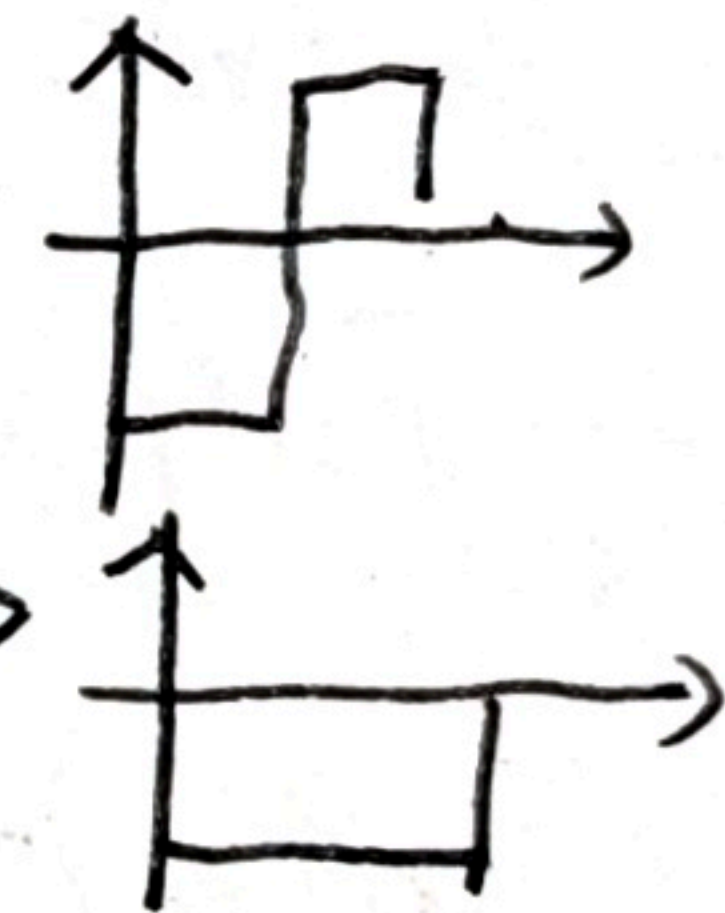
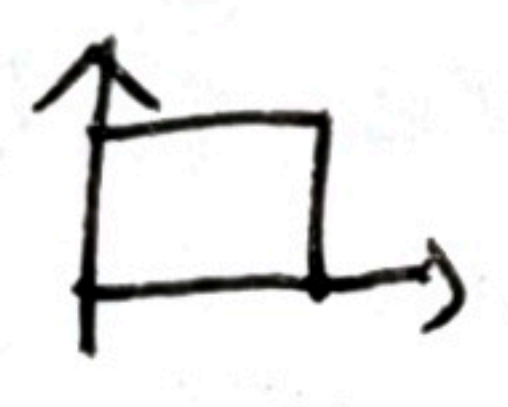
Remark. 2

HDB₃ 的主频带宽为 $R_b = 1/T_b$, 并且HDB₃ 的波型使用RZ码.

3) CMI (Coded Mark Inversion).

"0" $\rightarrow$ "01"

"1" $\rightarrow$ $\begin{cases} "11" \\ "00" \end{cases}$ 交替出现.

CMI的波型: "01" $\rightarrow$ 
"11" $\rightarrow$ 
"00" $\rightarrow$ 
即 0 为负, 1 为正.

Remark. CMI 编码使得编码码长增加了一倍, 并且主频带宽为 $2R_b = 2/T_b$.

4) Manchester 码 (双相码).

"0" $\rightarrow$ "01"

"1" $\rightarrow$ "10"

与CMI码类似.
"01" $\rightarrow$ 
"10" $\rightarrow$ 

Remark 主频带宽为 $2R_b = 2/T_b$, 编码码长也长了一倍.

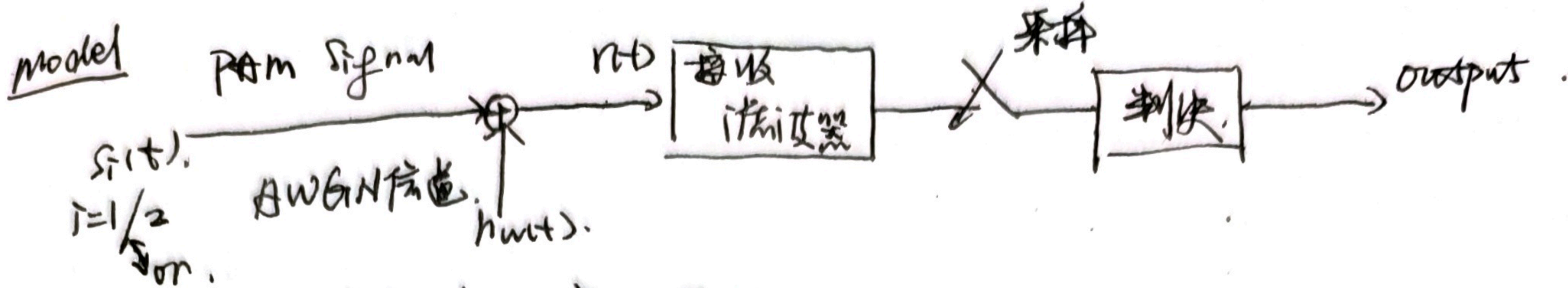
上述CMI与Manchester码, 虽然编码码长长了一倍, 但波形的总长并不长, 所以反映到波形上并不会变长.

总结: 带宽 $R_b = 1/T_b$: Bipolar/Unipolar NRZ, AMI, HDB₃.

$2R_b = 2/T_b$: Bipolar/Unipolar RZ, CMI, Manchester.

CMI码与HDB₃, AMI, Manchester码都不同的一点, 就是, 它有离散的时钟分量.

3. 加性白噪声信道下数字基带信号的接收 (2进制)

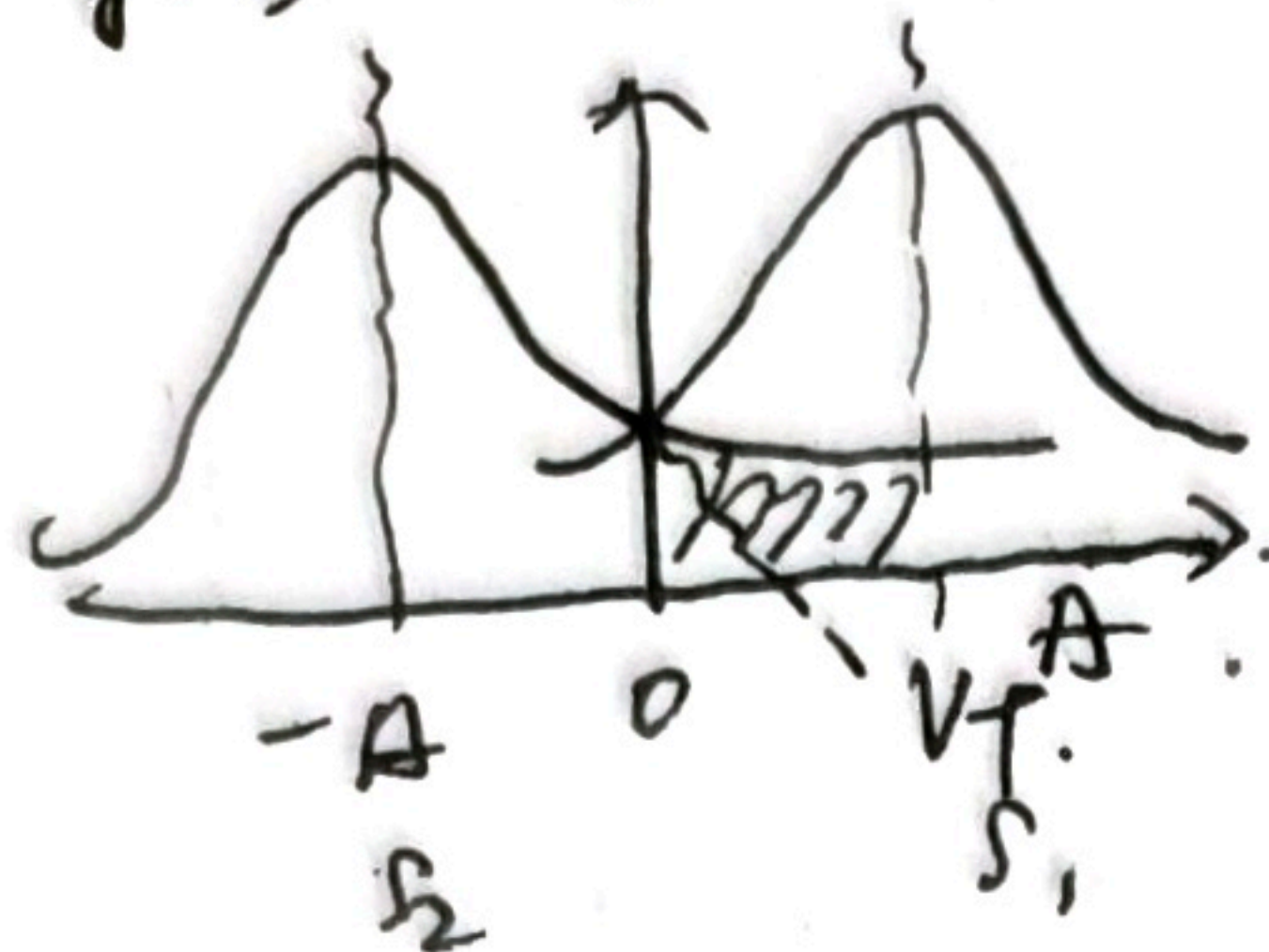


① Receiver with Low-Pass Filter.

1) Bipolar NRZ

$$y(t) = s_i(t) + n_w(t) = \begin{cases} A + n_w(t) \\ -A + n_w(t) \end{cases}$$

设 $n_w(t)$ 通过 filter 后方差为 σ^2 .

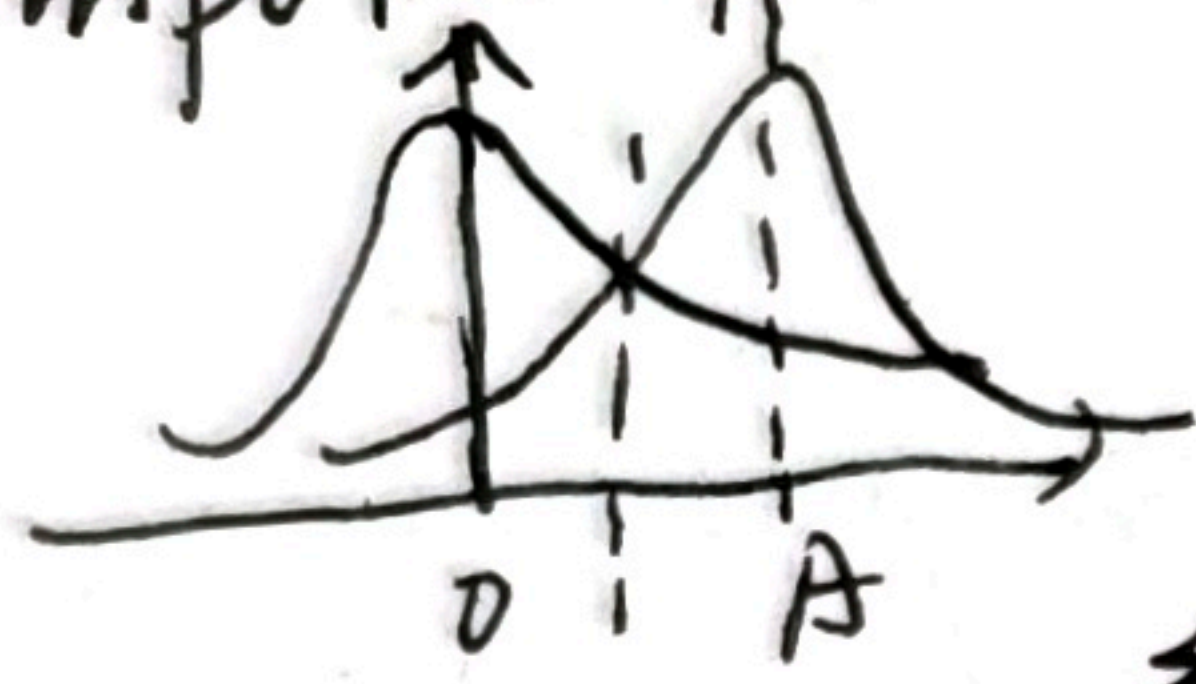


$$P_e = P(e|s_1)P(s_1) + P(e|s_2)P(s_2) = P(s_1) \int_{-\infty}^{V_T} f_1(x) dx + P(s_2) \int_{V_T}^{\infty} f_2(x) dx$$

where $f_1(x) \sim N(A, \sigma^2)$, $f_2(x) \sim N(-A, \sigma^2)$.

$$\frac{\partial P_e}{\partial V_T} = 0 \Rightarrow V_T = \frac{\sigma^2}{2A} \ln \frac{P(s_2)}{P(s_1)}$$

2) Unipolar NRZ



$V_T = \frac{A}{2} \Rightarrow$ 判决情况下.

对于 RZ 码, 影响的不是我们的 Decision 时刻, 所以这里对 NRZ 进行分析.

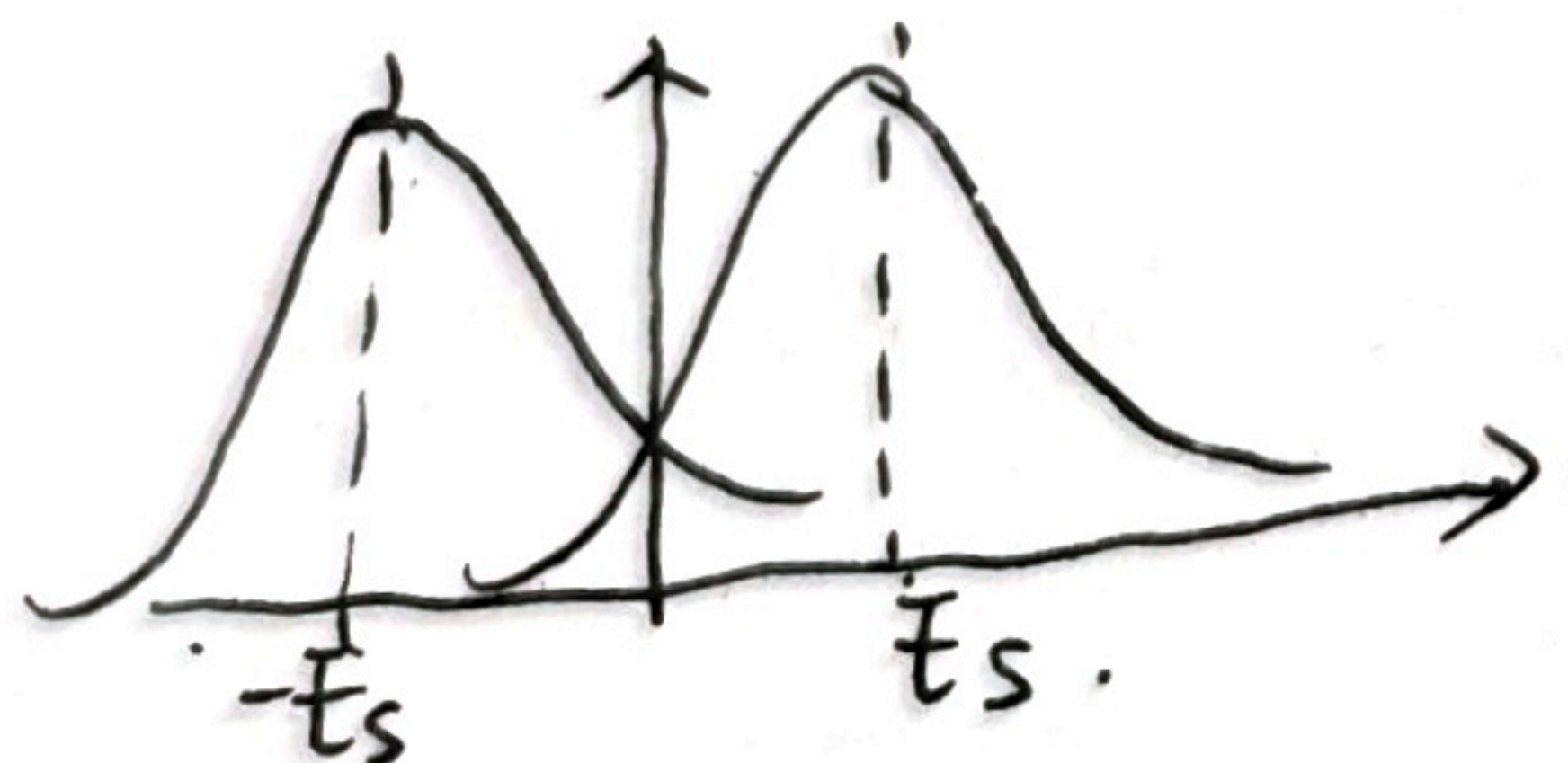
② Receiver with Matched Filter

$$h(t) = s_i(T_b - t)$$

① Bipolar NRZ

$$y_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-z) s_i(z) dz = \pm \int_{-\infty}^{\infty} s_i(t-z) s_i(t-z) dz = \pm E_s = \pm E_b$$

$h(t) \rightarrow h(t) \rightarrow n'(t) \in [n'(t)n'(t+2)]$, $R(0) = P = E[n'(t)n'(t)] = \frac{N_0}{2} E_s = \sigma^2$.

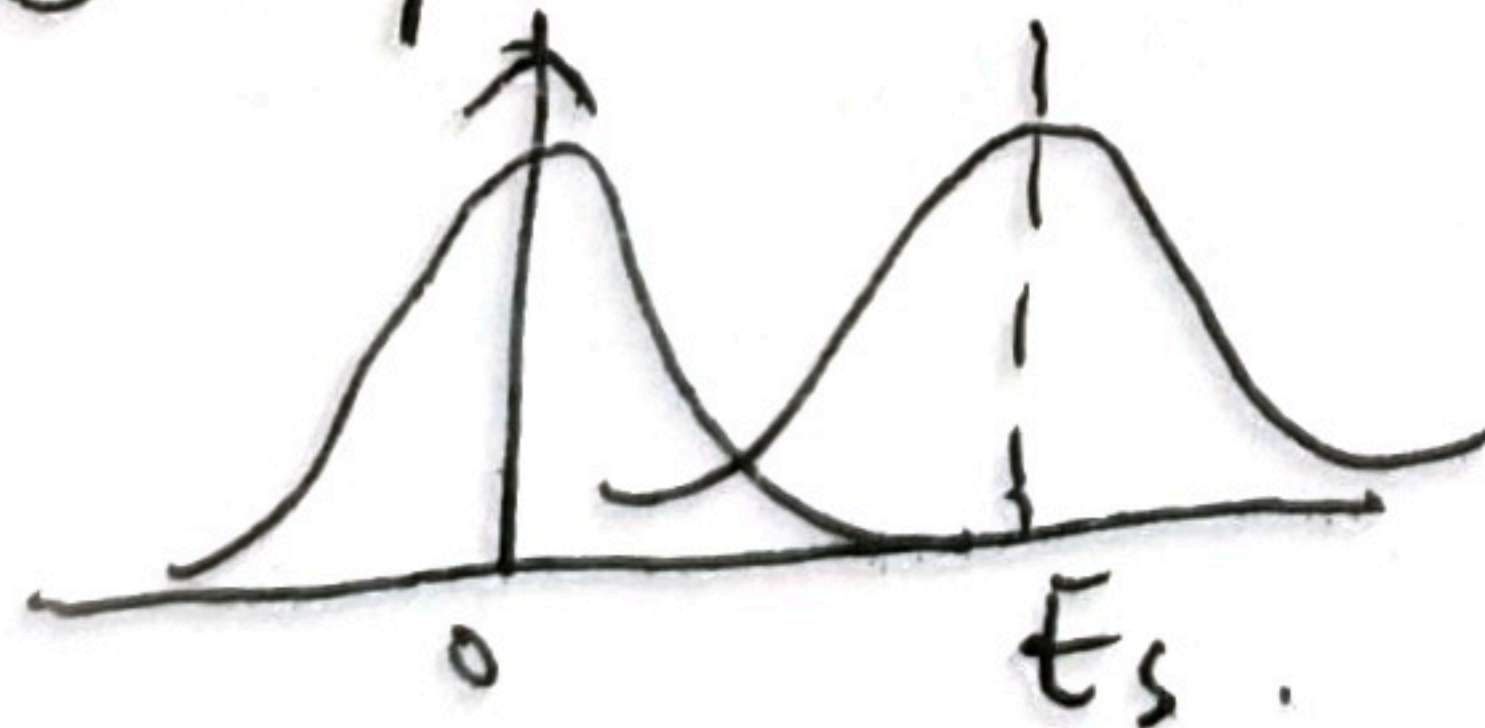


Bipolar for general.

匹配 Filter 接收到的信号与 E_s 的能量有关, 所以对于其他类型的 $s_i(t)$, $y_i(t) = \pm E_g$, $E[n'(t)] = \frac{N_0}{2} E_g$, 推导同样.

默认采样时刻 (任意)

② Unipolar NRZ



定义平均比特能量 $E_b = \frac{E_s}{2}$, 可以用 E_b 来表示算出的结果.

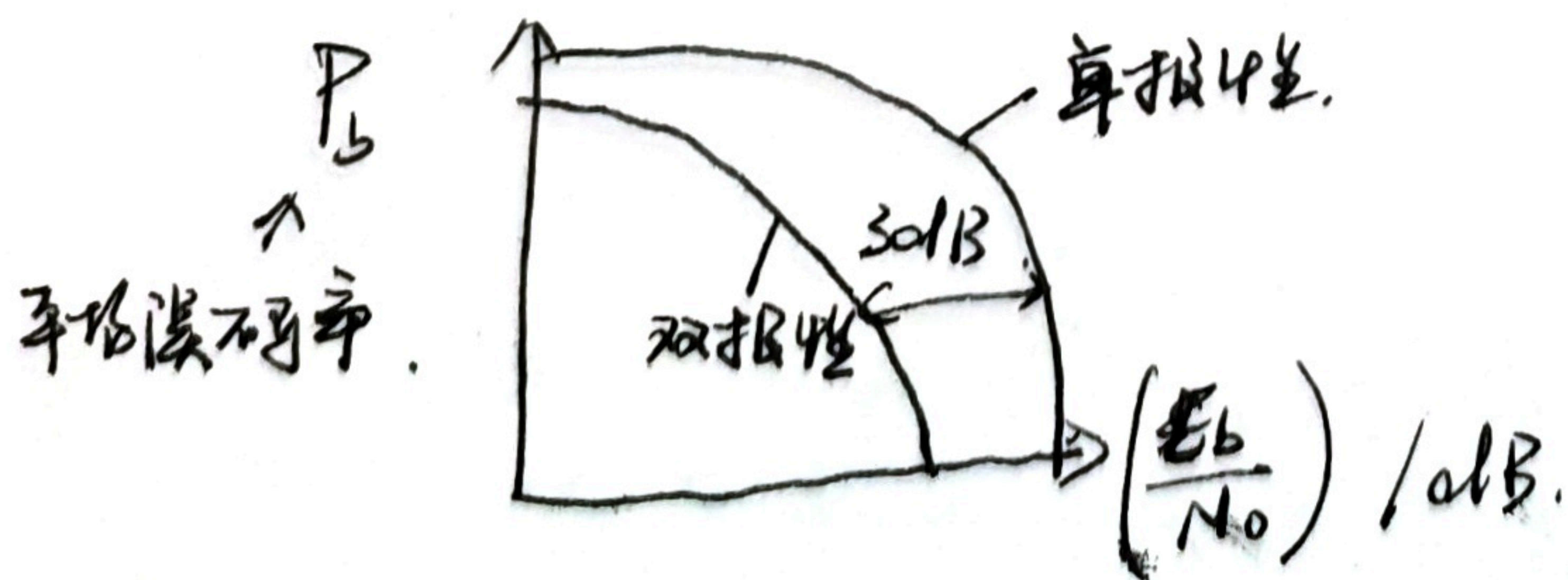
Unipolar for general

与 Bipolar for general 有区别的一样, Matched Filter 的输出与信号的能量有关, 与 $g(t)$ 的形状无关, $E_b = E_g/2$.

Remark

LPF 与 matched Filter 影响了得到了均值和方差, 但是分析方式一致.

相同误码率下, 双极性需要的 E_b/N_0 比单极性少 3dB, 那双极性表现更好, 可以通过以下来辅助理解: 双极性可以将两个 R.V. 的分布拉得比单极性大, 使得信号更容易被辨认.



4. PAM信号通过限带信道传输。(下节主要内容从这开始)

① matched filter 定理以及问题引入。

$h(t) = f_T(t) * c(t)$, $c(t)$ 为信道传输作用。

$$H(f) = G_T(f) C(f)$$

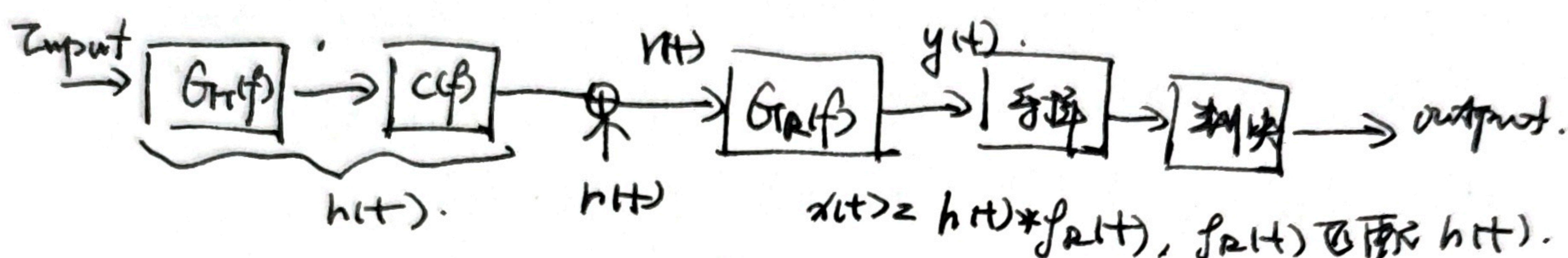
Let $G_R(f) = H^*(f) e^{-j2\pi f t_0}$, $f_R(t) = h(t_0 - t)$.

接收处理 $y(t_0) = \int |h(t)|^2 dt = E_h$, $\sigma_n^2 = \int_{-\frac{W_0}{2}}^{\frac{W_0}{2}} |H(f)|^2 df = \frac{W_0}{2} E_h$.

$$\left(\frac{S}{N}\right)_0 = \frac{y(t_0)^2}{\sigma_n^2} = \frac{2E_h}{N_0}, \text{ 只与 } E_h \text{ 有关.}$$

若 $G_T(f)$ 的带宽大于 $C(f)$ 的带宽, $G_T(f)$ 及 PAM 信号无法全部传输. $E_h \neq E_{f_T}$.

② 带限传输与 ISI.



$$x(t) = c(t) * \sum_n a_n f_T(t - nT) + n(t)$$

$$y(t) = f_R(t) * c(t) = \sum_n a_n c(t - nT) + n(t) * f_R(t)$$

对于采样时刻 $t = mT$, 有

$$y(mT) = \sum_n a_n x((m-n)T) + n(mT) * f_R(mT)$$

$$= a_m x(0) + \sum_{n \neq m} a_n x((m-n)T) + n(mT) * f_R(mT)$$

显然, 除了第一项, 其他都是干扰, 第二项为 (Intersymbol interference, ISI).

③ 无 ISI 的带限信号设计准则: Nyquist Criterion.

Theorem

Nyquist condition.

$$x(mT) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \iff \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(f + \frac{m}{T}) = T \quad (\text{任意 } f \text{ 均成立})$$

因为 x 对 t 归一化.

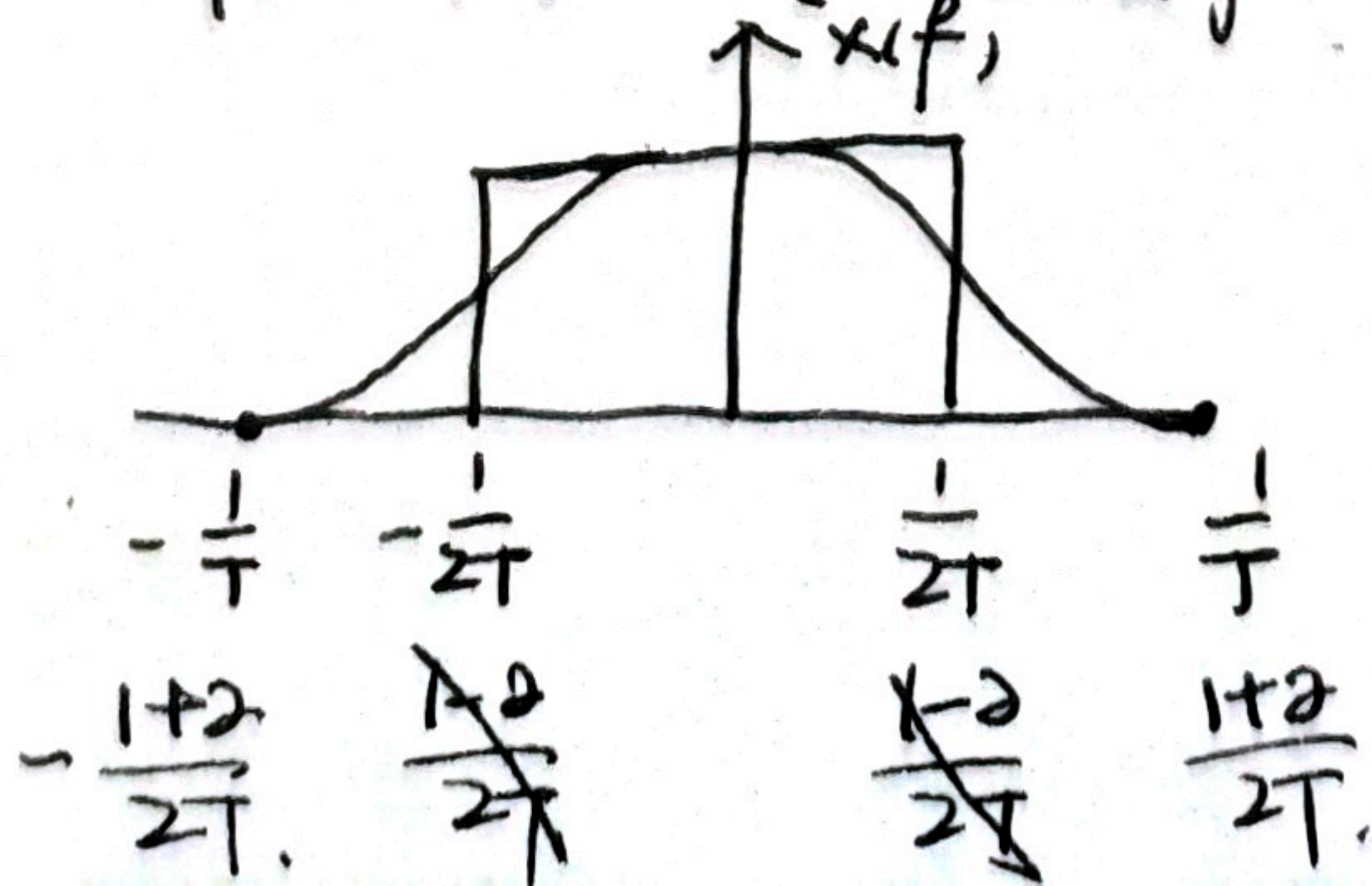
Remark

Nyquist Criterion 反映了如何设计 $x(f)$, 当 $\frac{1}{T} < 2W$ 时 (W 为 $x(f)$ 的带宽), $x(f)$ 可以重叠, 有很多方法可以设计 $x(f)$; 当 $\frac{1}{T} = 2W$ 时, 只有频域正弦波的 $x(f)$ 满足准则; 当 $\frac{1}{T} > 2W$ 时, $x(f)$ 不可重叠, 无法设计无 ISI filter.

Define

升余弦

"很多"方法之中, 一种可行的升余弦 filter 为 $x(f)$.



带宽最大为 $\frac{1+2}{2T}$, 最小为 $\frac{1}{2T}$.

$$W_{max} = \frac{2}{2T} = \frac{1}{T}$$

带宽最小为 $\frac{1}{2T}$. 方法.

Remark
2. 解拍号.

使得 $\frac{1+\alpha}{2T} \leq$ 给定带宽的任何 α 即 $\alpha \in [0, 2]$.

可以定义频带利用率 $\eta = \frac{R_s}{W}$, 对于单信道 $\eta = \frac{1}{\frac{1+\alpha}{2T}} = \frac{2}{1+\alpha} \in [1, 2]$.

④ 设计通信系统.

设计 $\int_R(t) \times K \int_T(t_0 - t) \xrightarrow{K=1} \int_R(t) = \int_T(t)$, 且 $G_T(f) = G_R^*(f) e^{-j2\pi f t_0} |_{t_0=0} = G_R^*(f)$.

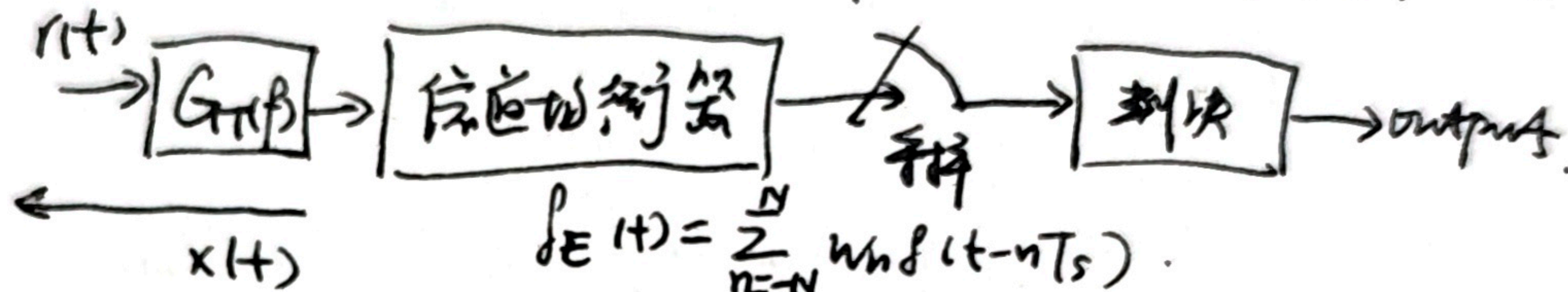
注意 $G(f)$ 只有有限带作用, $\int_R(t), \int_T(t)$ 都在带内.

Let $G_R(f) G_T(f) G_R(f) C(f) = |G_T(f)|^2 X(f) \Rightarrow G_T(f) = \sqrt{X(f)}$

即 $G_T(f) = G_R(f) = \sqrt{X(f)}$.

五. 信道均衡.

$C(f)$ 可能不是那样的理想, 需要在接收端补充信道均衡器来减少 ISI.



将 $\int_R(t), C(t), \int_T(t), \int_E(t)$ 系统串联起来, $h(t) = \int_R(t) * C(t) * \int_T(t) * \int_E(t) = X(t) * \int_E(t)$.

$h(KT_s) = \sum_{n=-N}^N w_n X[(K-n)T_s] \Rightarrow h_k = \sum_{n=-N}^N w_n X_{k-n}$.

Algorithm
zero-forcing
equalizer.

目标是在有抽头系数 w_n 的条件下最小化峰值畸变 (peak distortion).

$$\min D, D = \frac{1}{h_0} \sum_{k \neq 0} |h_k| = \frac{1}{h_0} \sum_{k \neq 0} \left| \sum_{n=-N}^N w_n X_{k-n} \right|$$

process

处理方式是简单的, 会形成求解超定方程组, 假设我们只有 3 个抽头 w_{-1}, w_0, w_1 .

此时信道中存在 ISI, $x(t) = \int_R(t) * C(t) * \int_T(t)$, $x_n = \begin{cases} x_{-1}, & n=-1 \\ x_0, & n=0 \text{ and } 0 \text{ otherwise} \\ x_1, & n=1 \end{cases}$

可见除了 x_0 外, 还有其他的 x_{-1}, x_1 . w_{-1}, w_0, w_1 的作用就是只保留 x_0 .

将 $h_k = \sum_{n=-N}^N w_n X_{k-n}$ 写成矩阵形式, 只有有值部分即 $XW = h$.

$$\begin{bmatrix} x_{-1} & x_0 & x_1 \\ x_0 & x_{-1} & x_1 \\ x_1 & x_0 & x_{-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{-1} \\ w_0 \\ w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{-2} \\ h_{-1} \\ h_0 \\ h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

因为 X_{k-n} , 所以存在对 x_n 的互乘存在移位, 这是一个超定方程组, 而解, 只能尽量减小 D .

做法是只考虑方程中的部分方程. 令 $[h_{-1} \ h_0 \ h_1] = [0 \ 1 \ 0]$ 得到 $[w_{-1} \ w_0 \ w_1]$.

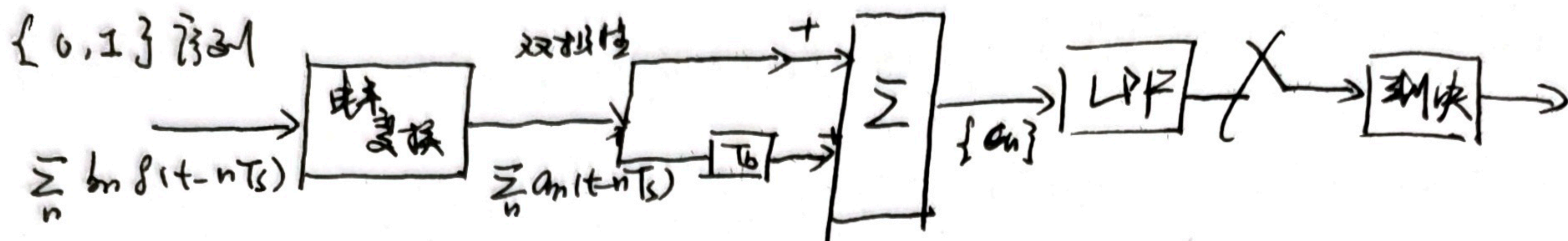
可见, h_{-2} 和 h_2 还有可能不为 0, 但是 peak distortion 已经被减小了.

Remark 如果信道均衡器, 等价于 $w_n = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & \text{other} \end{cases}$. $D = \frac{1}{x_0} \sum_{k \neq 0} |x_k|$, 即对 x_n 的 peak distortion.

6. 码元同步问题.

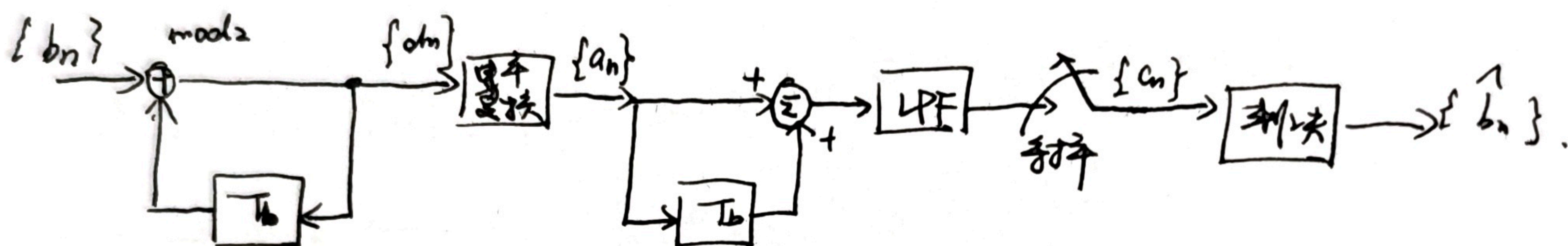
Nyquist 准则限制了最高码元速率 $R_s = \frac{1}{T_s} < 2W$, 但是我们可以对发送数据
进行相关编码, 引入可控的 ISI 而达到 R_s 的极限 $2W$, 那在理论上最高
频带利用率 $\eta = \frac{R_b}{W} = \frac{2W}{W} = 2 \text{ Baud/Hz}$. 因为要引入 ISI, 在终端接收端我们还可
以无损的恢复发送序列. (W 被移为奈氏带宽).

$$h(nT) = \begin{cases} 2, n=0, 1 \\ 0, \text{otherwise} \end{cases}$$



$C_n = a_n + a_{n-1}$, 译码时 $\hat{a}_n = C_n - \hat{a}_{n-1}$. $\hat{a}_{n-1}$ 如果错了, 后面都没法解译
误码传播.

解决办法是引入预编码! 即差分码(相对码).



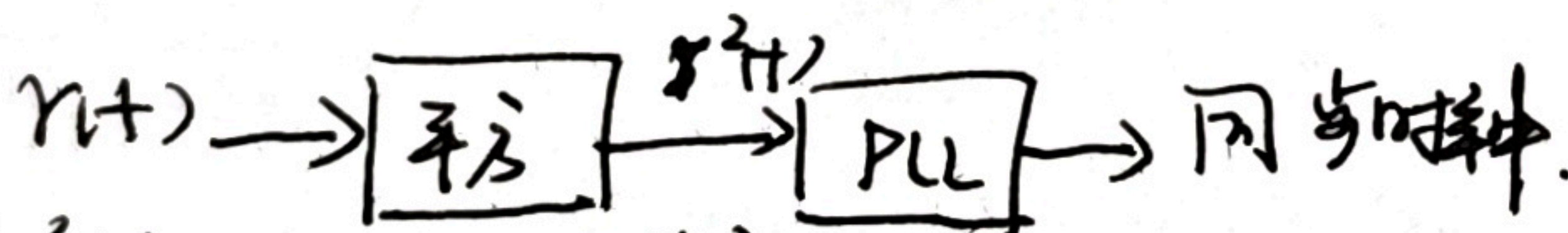
$$d_n = b_n \oplus d_{n-1}, a_n = 2d_n - 1, c_n = a_n + a_{n-1} = 2(d_n + d_{n-1} - 1)$$

$$\text{同样可以得到 } d_n + d_{n-1} = \frac{c_n}{2} + 1, \text{ 由于 } d_n = b_n \oplus d_{n-1}, b_n = d_n \oplus d_{n-1}$$

$$\text{所以 } \hat{b}_n = \left(\frac{c_n}{2} + 1 \right)_{\text{mod} 2} \Rightarrow c_n \text{ 为 } \pm 2 \text{ 时, 判决为 } 0, c_n \text{ 为 } 0 \text{ 时, 判决为 } 1.$$

7. 符号同步.

锁相法. 在接收端对接收信号以提取时钟信号.



应用锁相法的条件是 $r(t)$ 的带宽大于 $\frac{1}{2T_b}$.

五、数字信号的频带传输.

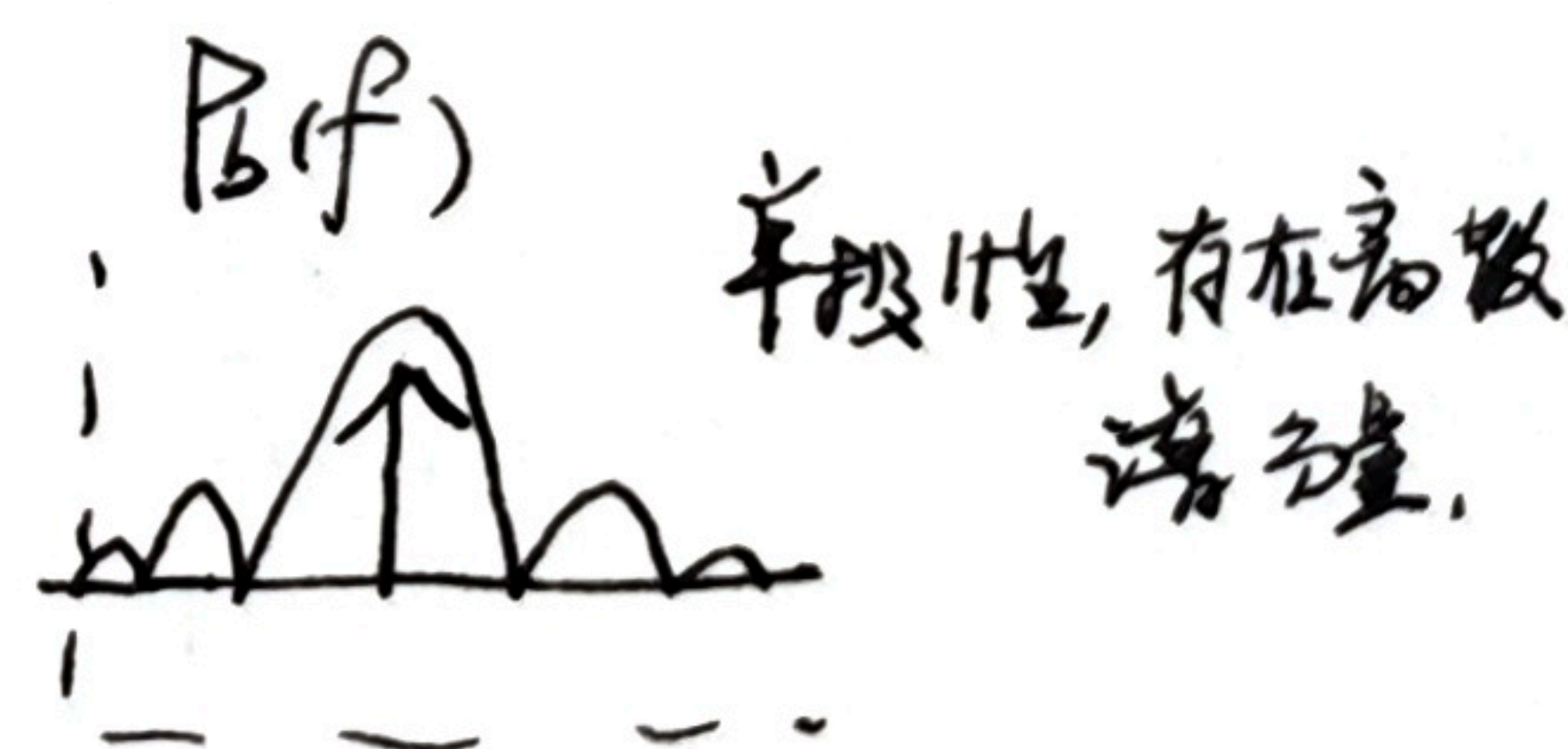
A. 二进制调制.

1. 通断键控 (On-off keying) OOK.

① 表达式以及 PSD 谱.

$$s_{OOK} = b(t) \cdot A \cos \omega_c t = A \left[\sum a_n \delta(t - nT) \right] \cos \omega_c t.$$

$$s_{OOKL} = A \left[\sum a_n \delta(t - nT) \right]$$



$$P_{OOK}(f) = \frac{1}{4} [P_L(f - f_c) + P_L(f + f_c)]$$

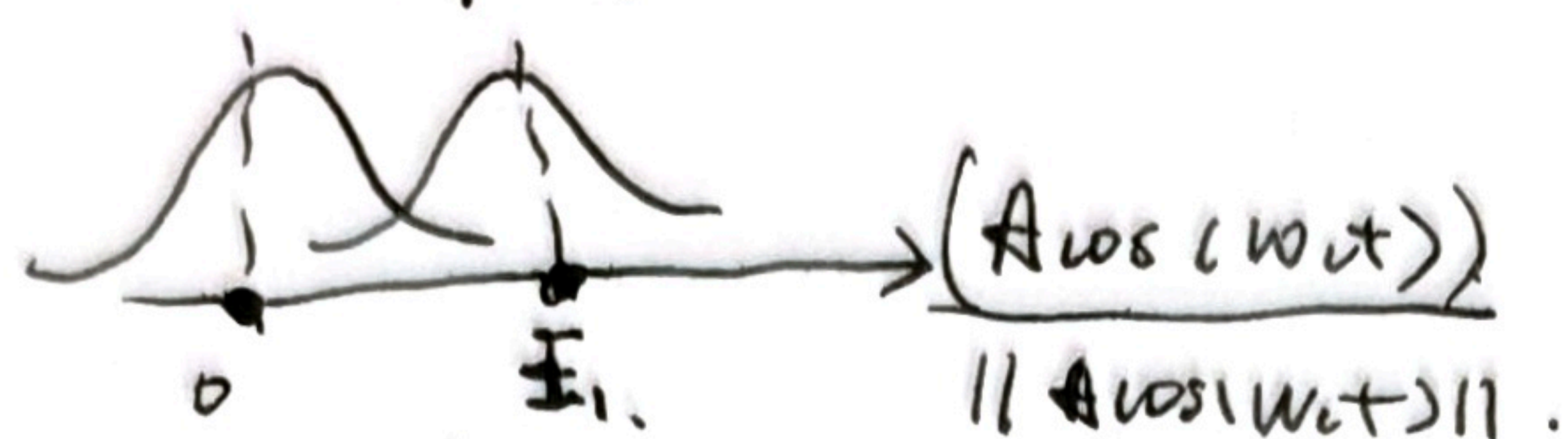
$$= \frac{A^2}{4} [P_b(f - f_c) + P_b(f + f_c)]$$

选择 $\delta(t - T_b)$ 为矩形波或冲激函数.
 $P_b(f)$ 为对称.

$$\text{注: } b(t) = \sum a_n \delta(t - nT_b), P_b(f) = \frac{1}{T_b} |A(f)|^2 = \frac{A^2}{T_b} + \frac{m^2}{T_b} \sum |G(\frac{\omega}{T_b})|^2 (f - \frac{n}{T_b})$$

② 解调与误码率

a. 相干解调



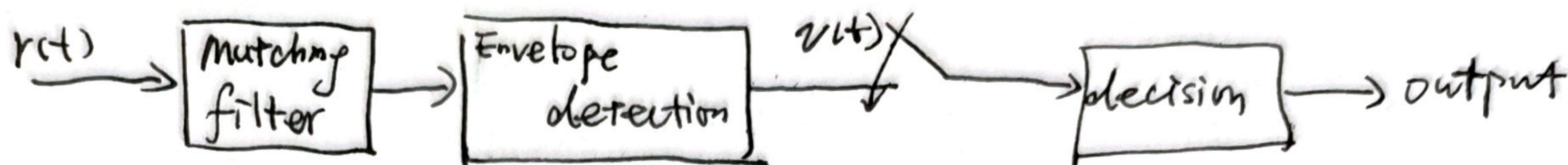
在频率或基带使用 matched filter 都 OK.

$$y(T_b) = aE_1 + z, \quad (a=0 \text{ or } 1), E_1 = \frac{A^2 T_b}{2}$$

$$P_b = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\right)$$

b. 非相干解调

载波振荡快, 必须捕捉准确相位, 但包络起伏不大.

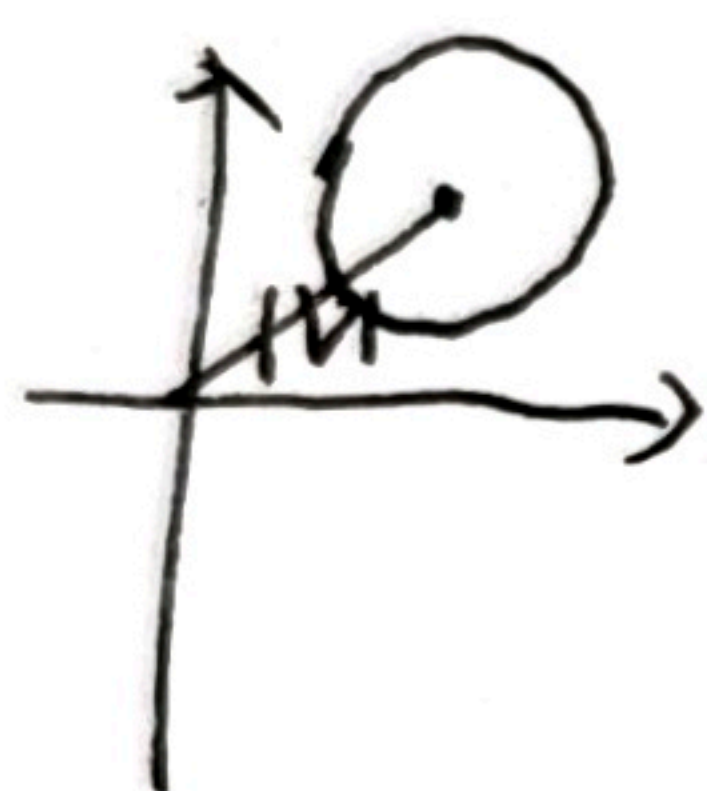


$$V(T_b) = |y(T_b)| = |aE_1 + z'|, \quad z' \text{ 可能在 } z \text{ 上有相位差, 但同分布.}$$

补充: $|z'| = |ze^{j\theta}| = |z \cos \theta + jz \sin \theta| = \sqrt{z^2 + z^2} = \sqrt{2}z, \quad z \sim N(0, \sigma^2)$

两个 Gauss (高斯) 分布之和的模长 (R^2 中的模) 服从 Rayleigh 分布, $f(x; \sigma) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad x \geq 0$

$|aE_1 + z'|$ 或 $|V + z'|$ 服从 Rice 分布, 即 χ^2 Rayleigh 分布.



$$f(x; \sigma^2, \nu) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{x^2 + \nu^2}{2\sigma^2}\right\} I_0\left(\frac{x\nu}{\sigma^2}\right)$$

2. 二进制移频键控 (2FSK) (相位不连续)

② 表达式与带宽

$$s_{FSK} = \begin{cases} s_1(t) = A \cos 2\pi f_1 t, & \text{"信号"} \\ s_2(t) = A \cos 2\pi f_2 t, & \text{"空号"} \end{cases}$$

通过 $\rho = \frac{1}{E_b} \int_0^{T_b} s_1(t) s_2(t) dt$, 当 $|f_1 - f_2| = \frac{n}{2T_b}, n = 1, 2, \dots$ 时, $s_1(t), s_2(t)$ 正交. 此时又称 2FSK 调制.

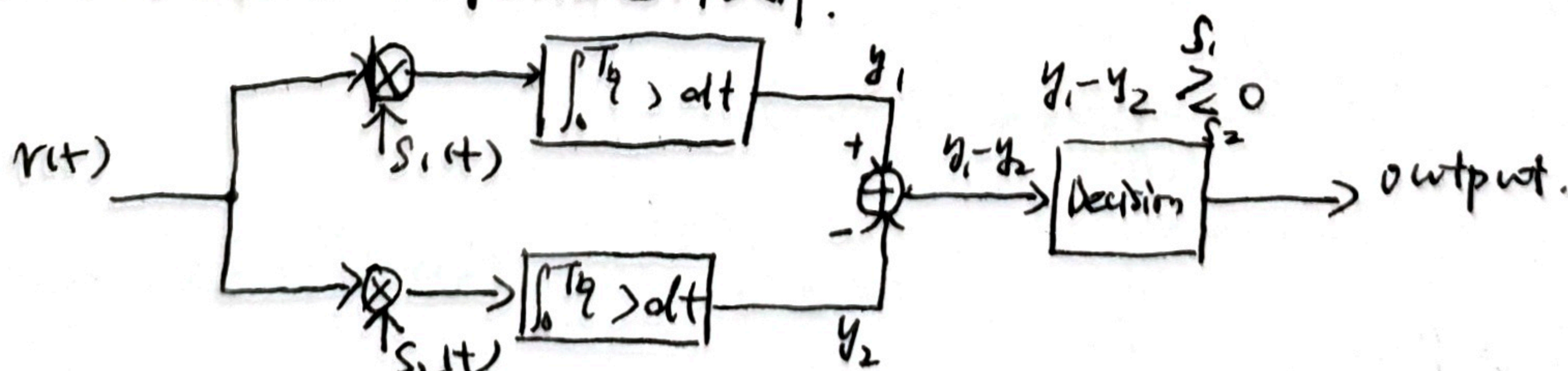
2FSK 的近似带宽由卡森公式给出:

$$B_{FSK} = 2(|\Delta f|_{\max} + W)$$

对于 2FSK, $|\Delta f|_{\max} = \frac{|f_1 - f_2|}{2}$, 必须用基频比较才有意义, W 就是 R_b .

② 解调与误码率

a. 相干解调, 2 维到 1 维进行分析

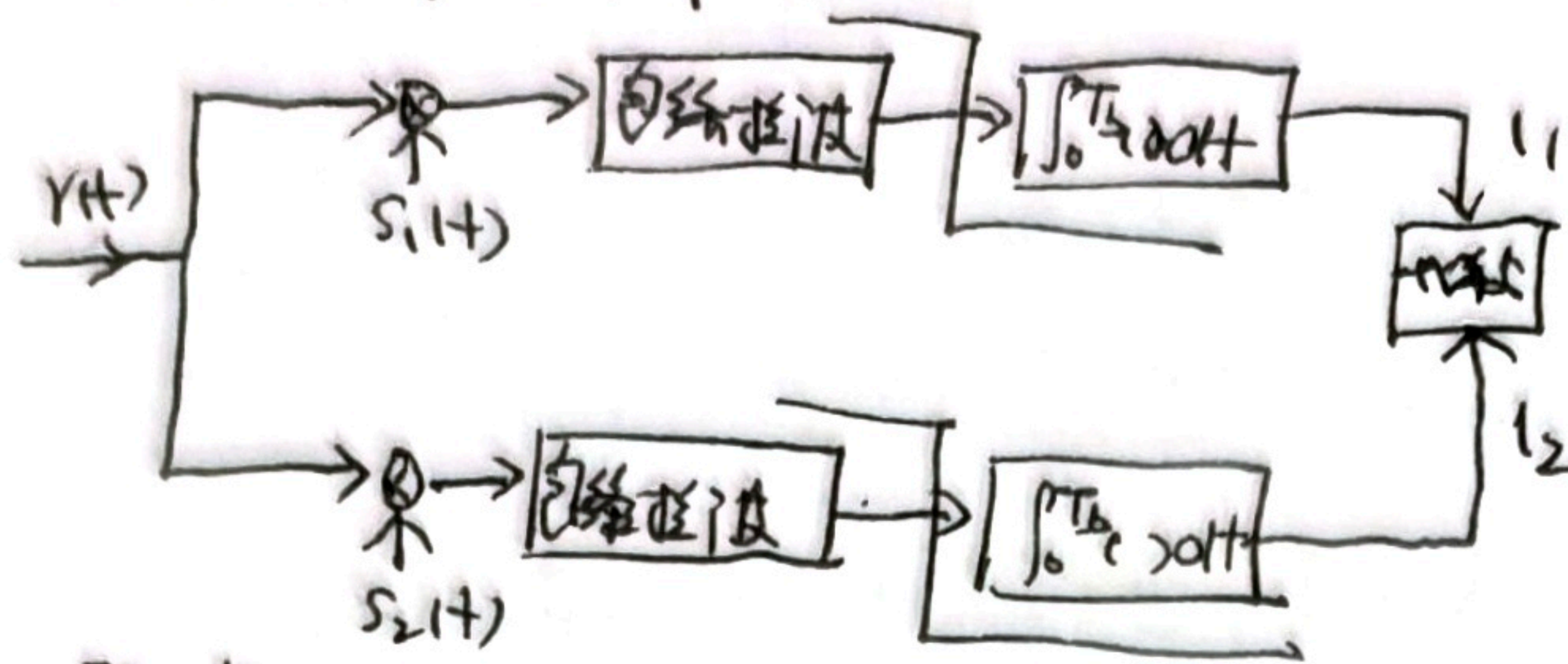


$$y_1 - y_2 = (s_1 - s_2) + z', \quad z' = z_1 - z_2 \sim N(0, 2 \cdot \frac{N_0}{2} E_b), \quad P_b = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\right)$$

$$dE_b, d=1, s_1(t), d=-1, s_2(t)$$

5. 非相干解调

OOK 的非相干解调 $\times 2$.



$l_1 > l_2, s_1$
 $l_1 < l_2, s_2$

3. 最小频移键控 (MSK) 即连续相位 2FSK

产生
分析

$$b(t) = \sum_n a_n f(t - nT) \xrightarrow{\text{Bipolar NRZ}} \text{VCO} \xrightarrow{k_f} \text{MSK}$$

最小频移键控 (MSK) 的最小, 指的是 $|f_1 - f_2|$ 最小且正.

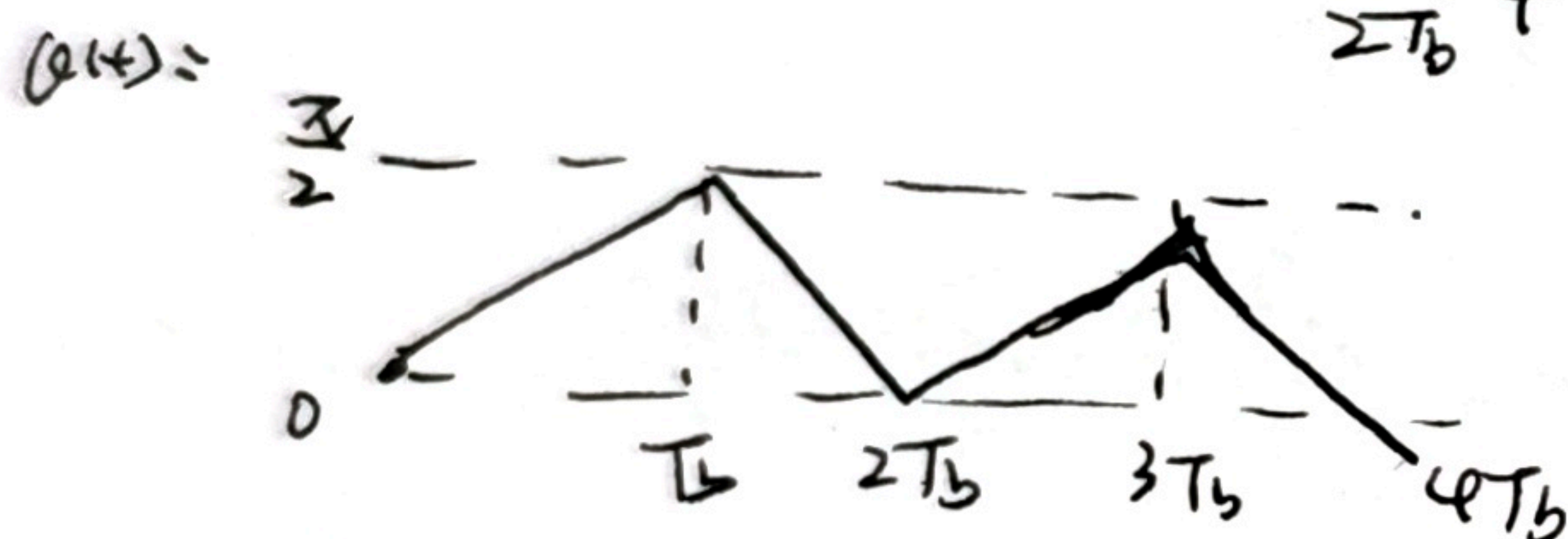
$$|f_1 - f_2| = \frac{1}{2T_b}, \quad |\Delta f|_{\max} = \frac{|f_1 - f_2|}{2} = \frac{1}{4T_b}$$

若使得 VCO 产生的 $|\Delta f|_{\max} = \frac{1}{4T_b}, k_f = \frac{1}{2}$, 则有

$$s_{\text{MSK}} = A_{\text{MSK}} \left[2\pi f_c t + \pi \int_{-\infty}^t b(t) dt \right]$$

可以将其代为 $s_{\text{MSK}} = A_{\text{MSK}} \left[2\pi \left(f_c + \frac{1}{4T_b} a_n \right) t + x_n \right]$

其相位为 $\phi(t) = \frac{\pi a_n}{2T_b} t + x_n$, 可见相位是连续的折线, 斜率为 $\pm \frac{\pi}{2T_b}$.



每个周期相位跳变 $\frac{\pi}{2}$, 可以通过观测相位空间轨迹来进行接收

Remark
MSK 是恒包络连续相位调制, 适用于非线性功放, 可减少失真, PSD 下降快.
MSK 的误比特率和 2FSK, QPSK 相同. $P_b = \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$.

4. 二进制移相键控 (2PSK) (BPSK)

① 发送, PSD, 接收, 误码

$$s_{2\text{PSK}} = A \left[\sum_n a_n f(t - nT) \right] \cos \omega_c t, \quad \{a_n\} \text{ 是双极性, OOK 反相相差点}$$



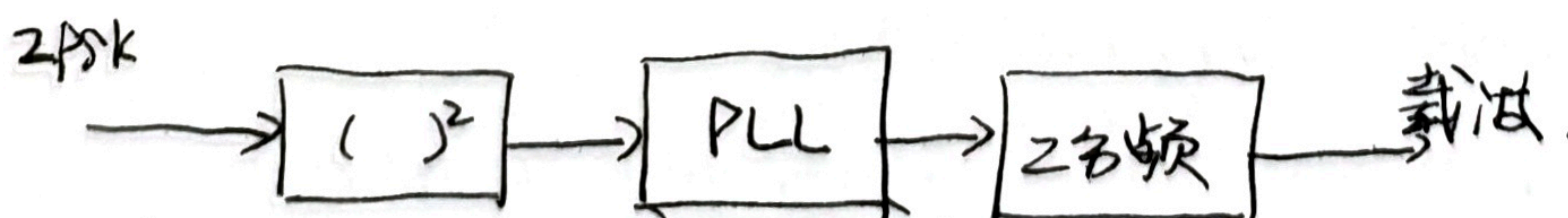
PSD 中没有离散谱, 只有连续谱, 因为 $E[a_n] = 0$.

双极性码具有统一的误比特率. $P_b = \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$

可以在频带最优接收, 同样也可采用基带最优接收.

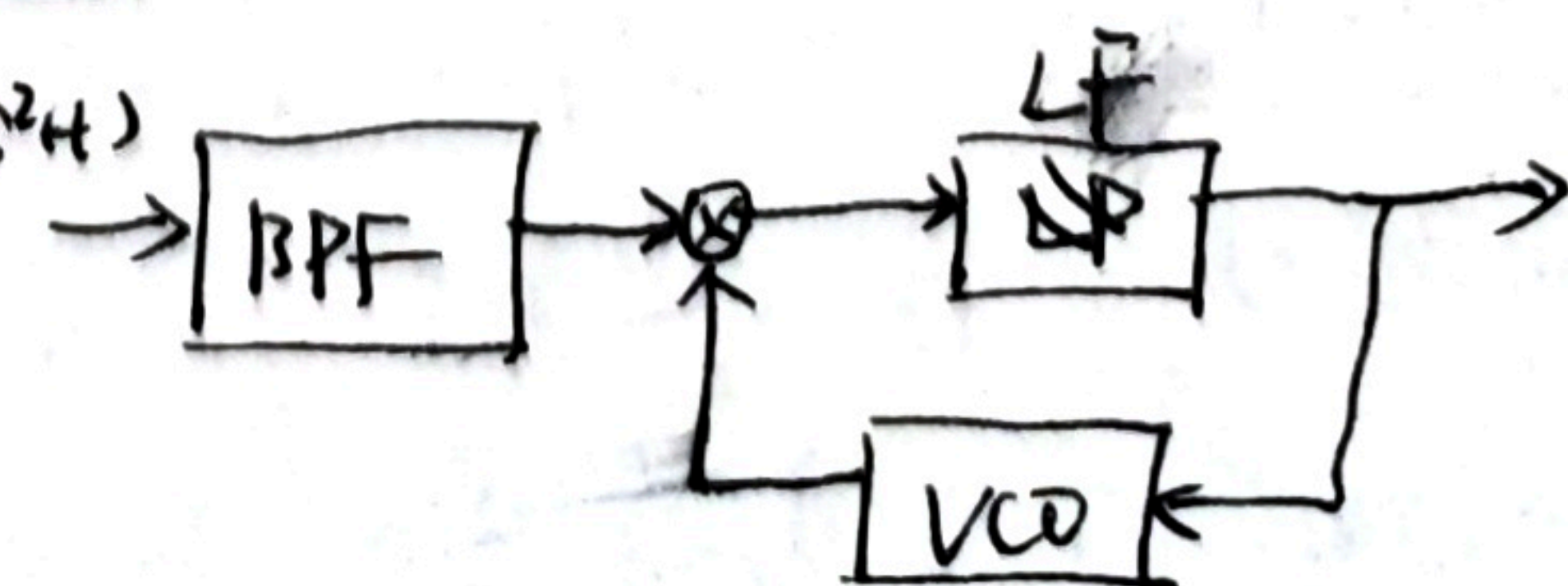
② 2PSK 的载波同步 (基带载波)

a. 平方环

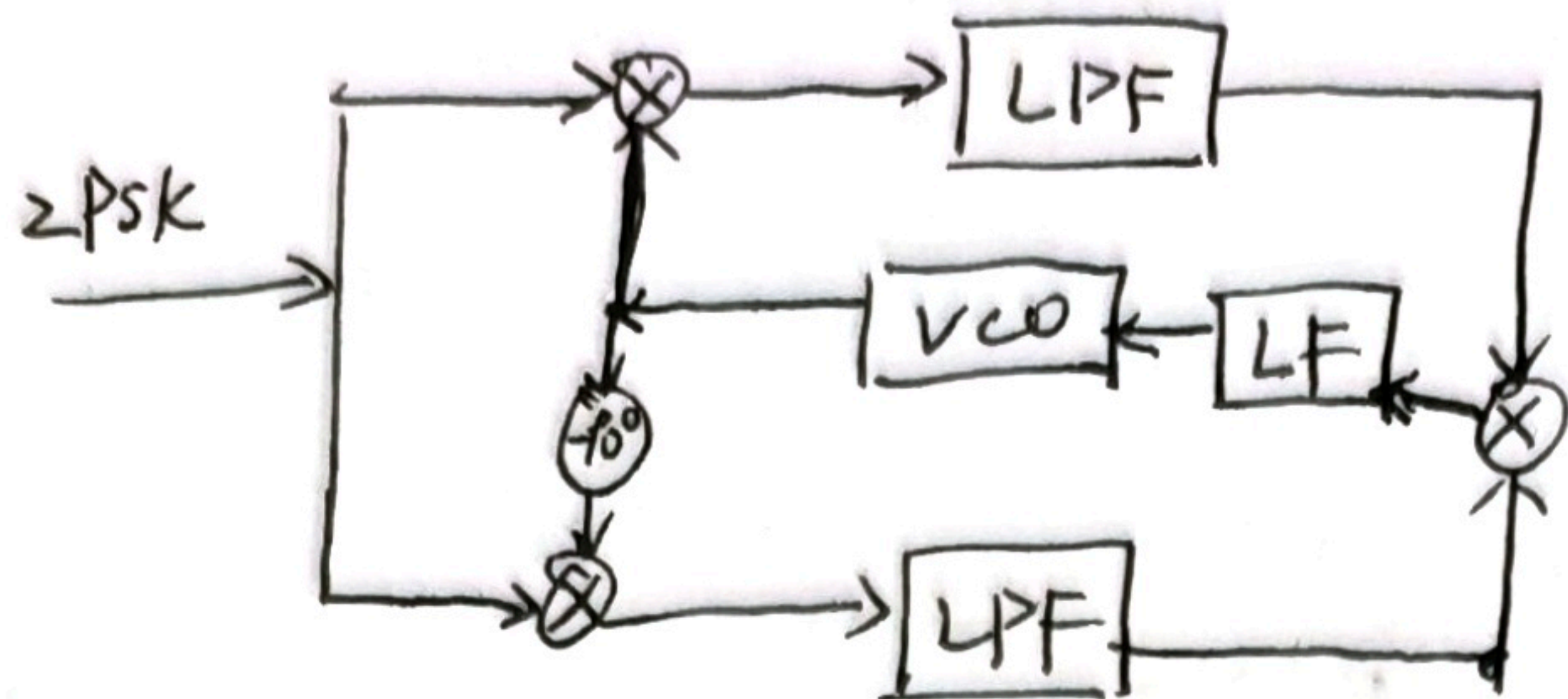


$$s_{2\text{PSK}} = b(t) \cos \omega_c t$$

$$s_{2\text{PSK}}^2(t) = \frac{b^2(t)}{2} (1 + \cos 2\omega_c t)$$



b. 科斯塔斯环法 (COSTAS).

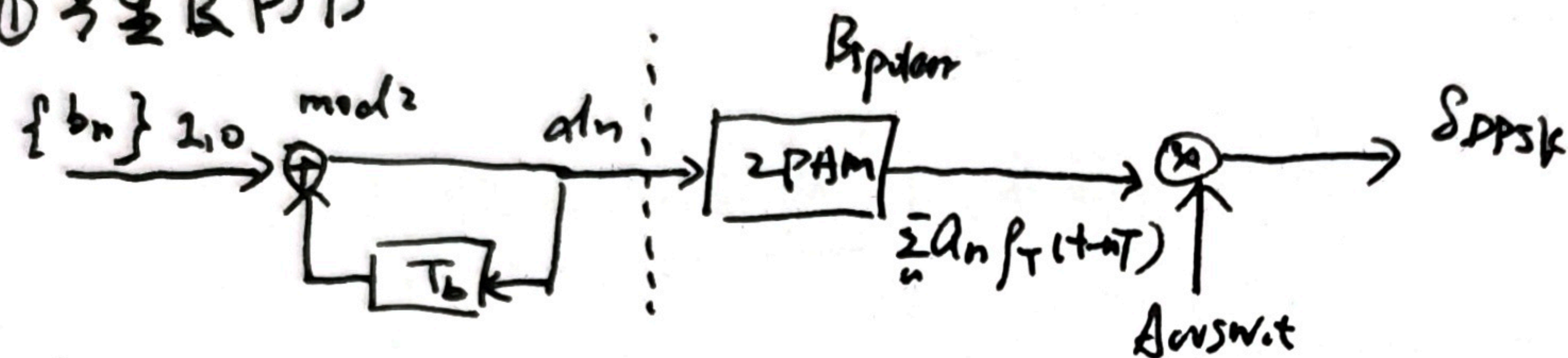


Remark 尽管有相位锁定的工具存在, 依然存在相位模糊的问题 (phase ambiguity).

因子平方 / COSTAS 环都会被 $\cos/\sin$ 的相位多值所影响, 容易出现 π 相位误差 (0 或 π).
解决方法是 DPSK

5. 差分移相键控 (DPSK).

① 产生 DPSK



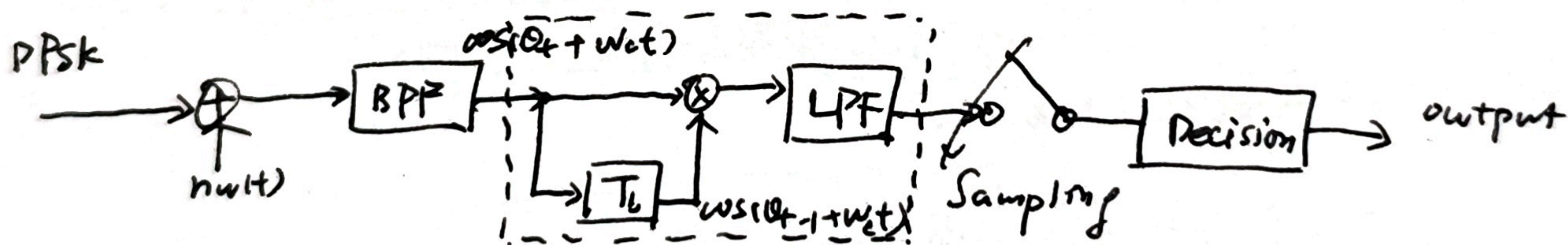
使用相对码来取预编码, $a_n = b_n \oplus a_{n-1}$, 以 相位差 来传递绝对码。

判断准则: 当前绝对码为 1, 相位突变 ($\pi \rightarrow 0$ 或 $0 \rightarrow \pi$).

ex: 绝对码: 11000100 | 忽略差分编码相关性, DPSK 的 PSD 与
绝对码: 0 π 0 0 0 π π π | 2PSK 的 PSD 一致。

② 解调及误码率.

a. 差分相干 (Differential Coherent).

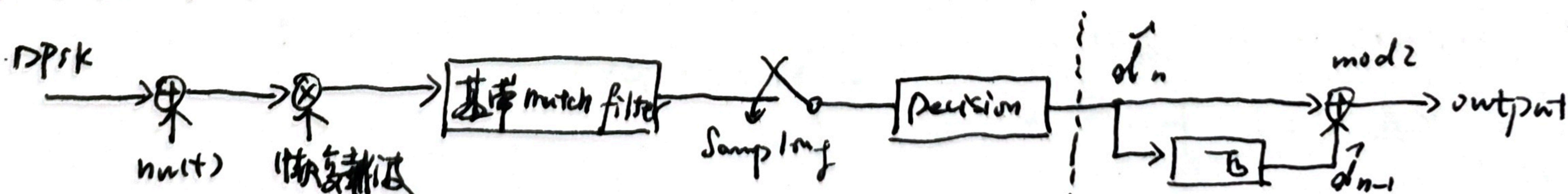


$$LPF \rightarrow \{\cos(w_c t + \theta_t) \cos(w_c t + \theta_{t-1})\} \Rightarrow \propto \cos(\theta_t - \theta_{t-1})$$

于是通过差分相干差分相干差分相干过 LPF 的支路提取出相位差, 跟据之前分析.
绝对码为 1, 相位差 $\pm \pi$, 绝对码为 0, 相位差为 0.

Remark Differential Coherent 方法并没有提取载波, 所以是非相干方法.

b. 相干解调.



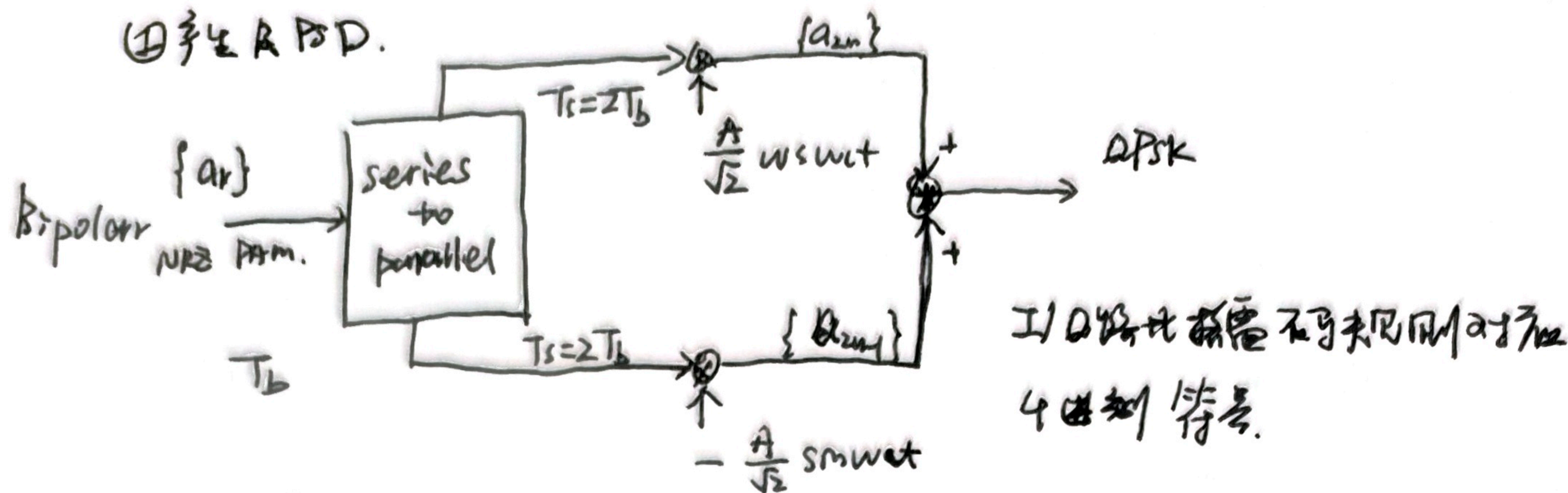
$\hat{b}_n = \hat{a}_n \oplus \hat{a}_{n-1}$, 当 $\hat{a}_n$ 和 $\hat{a}_{n-1}$ 出现同样的相位模糊时, 可抵消, 如果 2PSK 误码率 P_b .

$$P_{DPSK}(e) = 1 - P_b^2 - (1 - P_b)^2 = 2P_b(1 - P_b) \approx 2P_b$$

B. 四进制调制

1. Quadrature-PSK (QPSK)

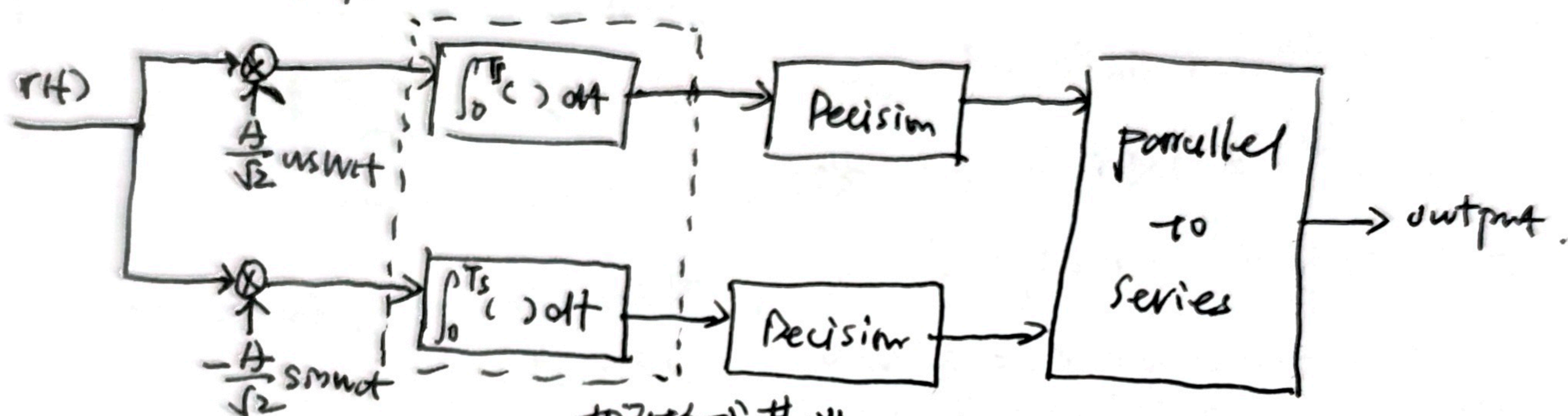
① 产生 QPSK



$$S_i(t) = \frac{A}{\sqrt{2}} [I_i(t) \cos \omega_c t - Q_i(t) \sin \omega_c t]$$

PSD 就是 I 路 2PSK 的 PSD 和 Q 路的和, 主瓣带宽是 2PSK 的 $1/2$ 。

② 接收及误码特性



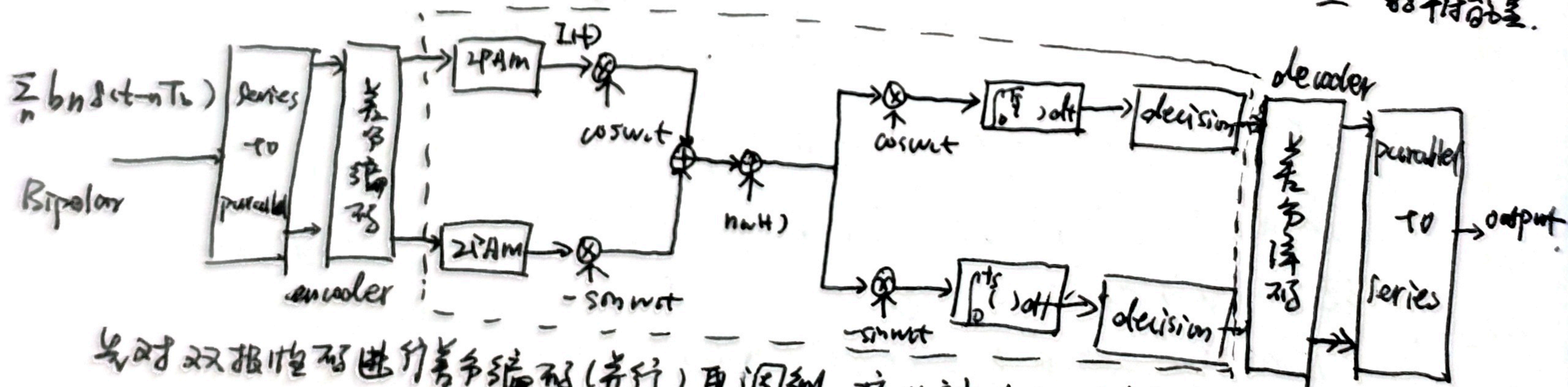
也可换成基带 matched filter 并采样。

$$P_b = P_I P_{Ie} + P_Q P_{Qe} = P_{Ie}, \text{ QPSK 的误码率与 2PSK 相同. } P_b = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

(具体的设计需要具体的分析), 误码率 $P_s = 1 - (1 - P_b)^2$

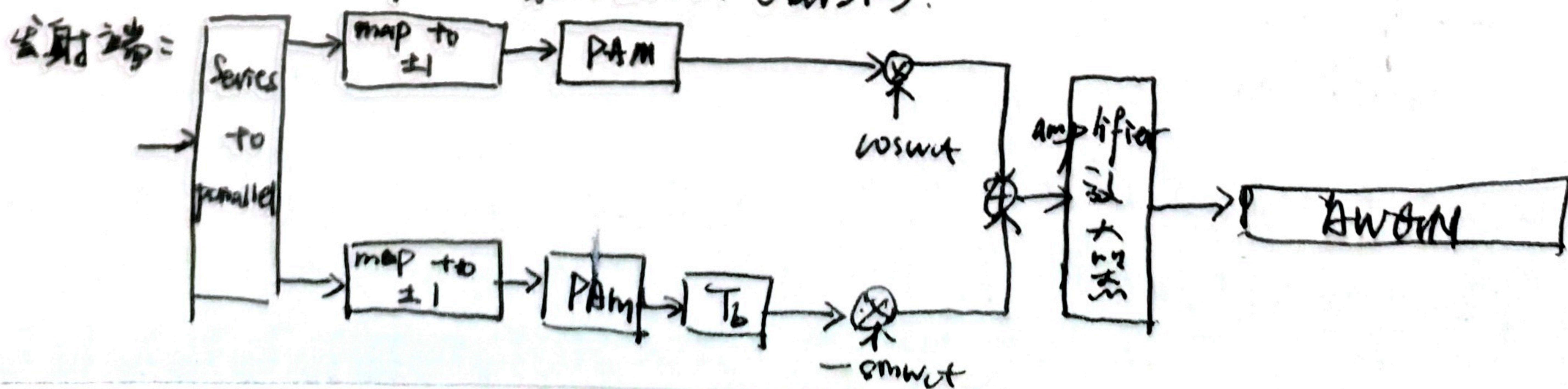
2. 差分四相移键控 (DQPSK)

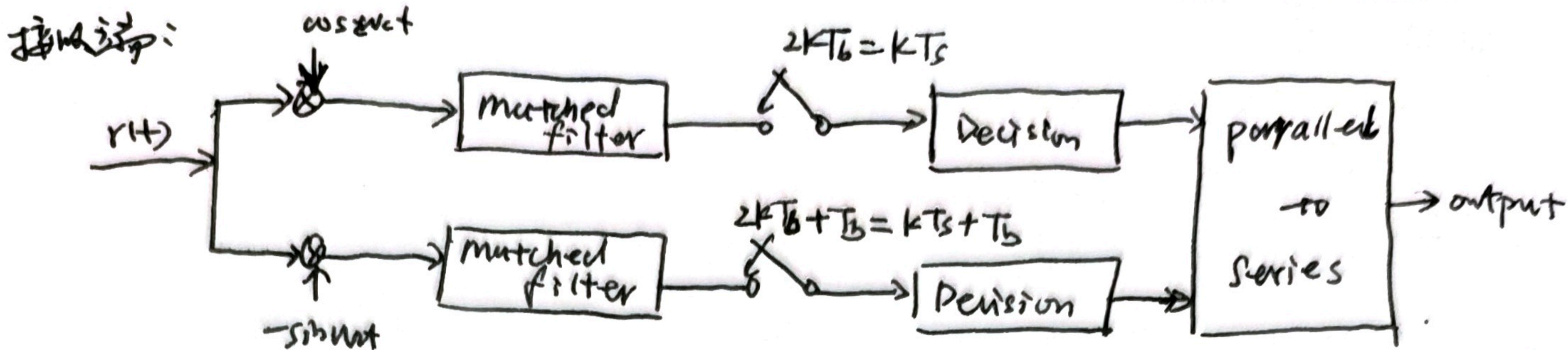
$$E_b = \frac{A^2 T_b}{2} \text{ 对于 Bipolar NRZ 信号}$$



先对双极性码进行差分编码(并行)再调制, 接收端得到恢复序列后应先差分译码。如果发生了同样相邻码元(前一个和后一个码元), 则不受相位旋转影响。

3. 偏移四相移键控 (Offset-QPSK, OQPSK)





QPSK 又称差分 QPSK, 将 I 路和 Q 路错开了 T_b , 这样可以减少零点, 重码, 从而减少非线性失真值得注意的差, QPSK 的 PSD 和误比特率与 QPSK 相同。

4. 二进制调制和四进制调制对比。

可以在相同发时中, 比较不同调制的误比特率。

$$BPSK \sim QPSK \sim MSK < 2FSK, OOK.$$

$$BPSK < DPSK, QPSK < DQPSK \Rightarrow BPSK \times QPSK < DPSK < DQPSK.$$

相干解调 < 非相干解调。

C. 正交信号空间与统计判决理论。

1. 正交信号空间。

define & property

(1) $\langle f_m(t), f_n(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f_m(t) f_n(t) dt$, $\langle, \rangle$ well-define, $\langle s_1(t), s_2(t) \rangle = \langle \vec{s}_1, \vec{s}_2 \rangle$

(2) 信号在正交归一基函数信号空间中可表示为矢量的形式 $\vec{s} = [s_1, \dots, s_i, \dots, s_N]$

$$s_i = \langle s(t), f_i(t) \rangle, s(t) = \sum_i s_i f_i(t).$$

(3) 可以由内积求得 (能量), $\langle \vec{s}_i, \vec{s}_i \rangle = \|\vec{s}_i\|^2 = \int s_i^2 dt = \sum_i s_i^2$

(4) 定义归一化互相关系数, $\rho_{mk} = \frac{\langle \vec{s}_m, \vec{s}_k \rangle}{\sqrt{E_m E_k}} = \frac{\langle s_m(t), s_k(t) \rangle}{\sqrt{E_m E_k}}$

(5) 可以由内积求得核定义归一化互相关系数, $d_{mk}^2 = \|\vec{s}_m - \vec{s}_k\|^2 = \langle \vec{s}_m - \vec{s}_k, \vec{s}_m - \vec{s}_k \rangle$

Remark 在以下的所有调制中, 正交基函数都是 $\sqrt{\frac{2}{T_b}} \cos(\omega_c t + \phi(t))$ 或 $\sqrt{\frac{2}{T_b}} \sin(\omega_c t + \phi(t))$

2. 统计判决理论。

准则

MAP: $\hat{s} = \arg \max_{s_i} P(s_i) p(\vec{r} | s_i)$

ML: $\hat{s} = \arg \max_{s_i} p(\vec{r} | s_i)$

当各信号先验概率相同的情况下, MAP 就是 ML。

引入了正交信号空间和统计判决理论, 就能对任何调制的一般最优性能。

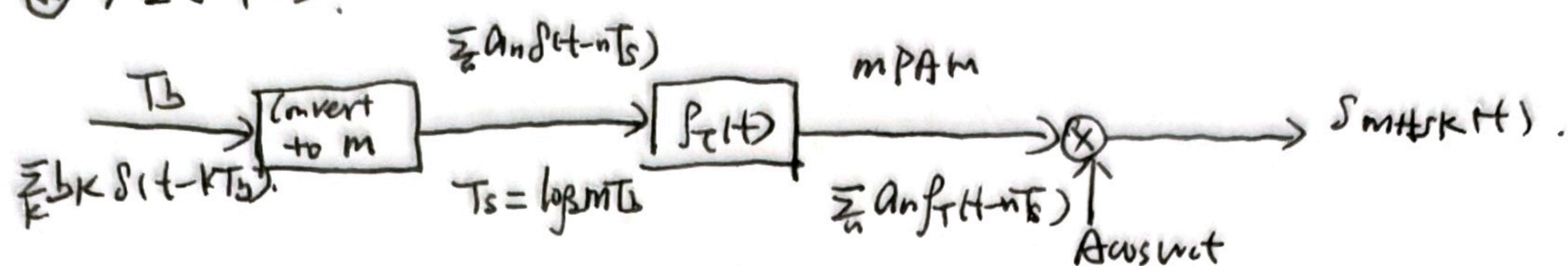
在正交信号空间进行操作, 最优接受滤波器对 $r(t)$ 在空间上正交展开, 得到 $\vec{r}$, 再进行 ML 准则判决 ($\vec{r} = [\langle r(t), f_1(t) \rangle, \dots, \langle r(t), f_N(t) \rangle]$)。

可以证明 $\vec{r}$ 是充分统计量, 可以从中得到关于判决的所有信息。

D. M进制调制

1. M进制振幅调制 (MASK).

① 产生 PSD.



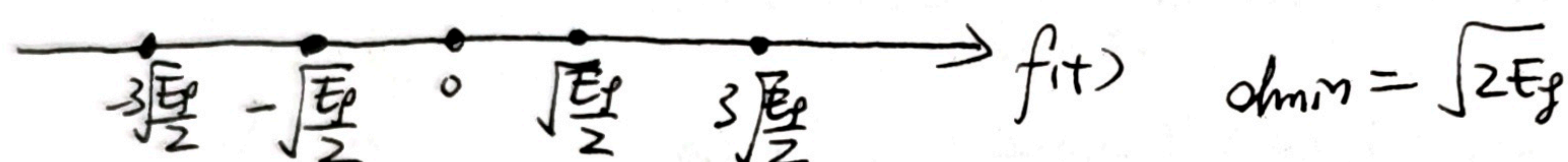
$$s_{\text{mask}}(t) = b(t) \cdot A \cos(2\pi f_c t)$$

$$= \sum_n A_n f_T(t - nT_s) \cdot A \cos(2\pi f_c t)$$

$$\Rightarrow \sum_n A_n f_T(t - nT_s) \cos(2\pi f_c t)$$

$$= \sum_n A_n \sqrt{\frac{E_p}{2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{E_p}} f_T(t - nT_s) \cos(2\pi f_c t) \right)$$

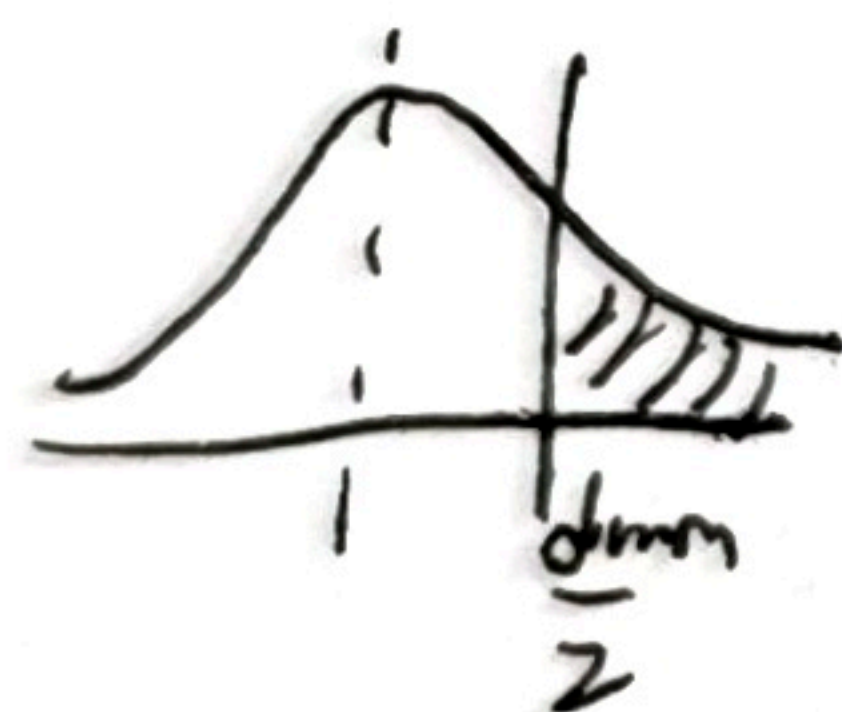
$$\vec{s}_i = A_i \sqrt{\frac{E_p}{2}} \cdot f(t), \quad f(t) = \sqrt{\frac{2}{E_p}} f_T(t - nT_s) \cos(2\pi f_c t)$$



PSD: M进制 PAM 的 PSD 再搬移.

$$\frac{A^2}{4} (P_b(f - f_c) + P_b(f + f_c)), \quad P_b = \frac{1}{T_s} \cdot P_a(f) \cdot |G(f)|^2$$

② 接收时误码率.



考虑单码元

$$P_e = \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\frac{d_{\min}}{2\sqrt{2} \sqrt{\frac{N_0}{2}}} \right) = \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{4P/N_0}} \right)$$

$$\text{MASK 时是单码元的叠加. } P_{\text{mask}}(e) = \frac{(M-2) \cdot 2P_e + 2 \cdot P_e}{m}$$

$$\text{MASK 时 } E_b = E_s / \log_2 m$$

2. M进制移相调制 (MPSK).

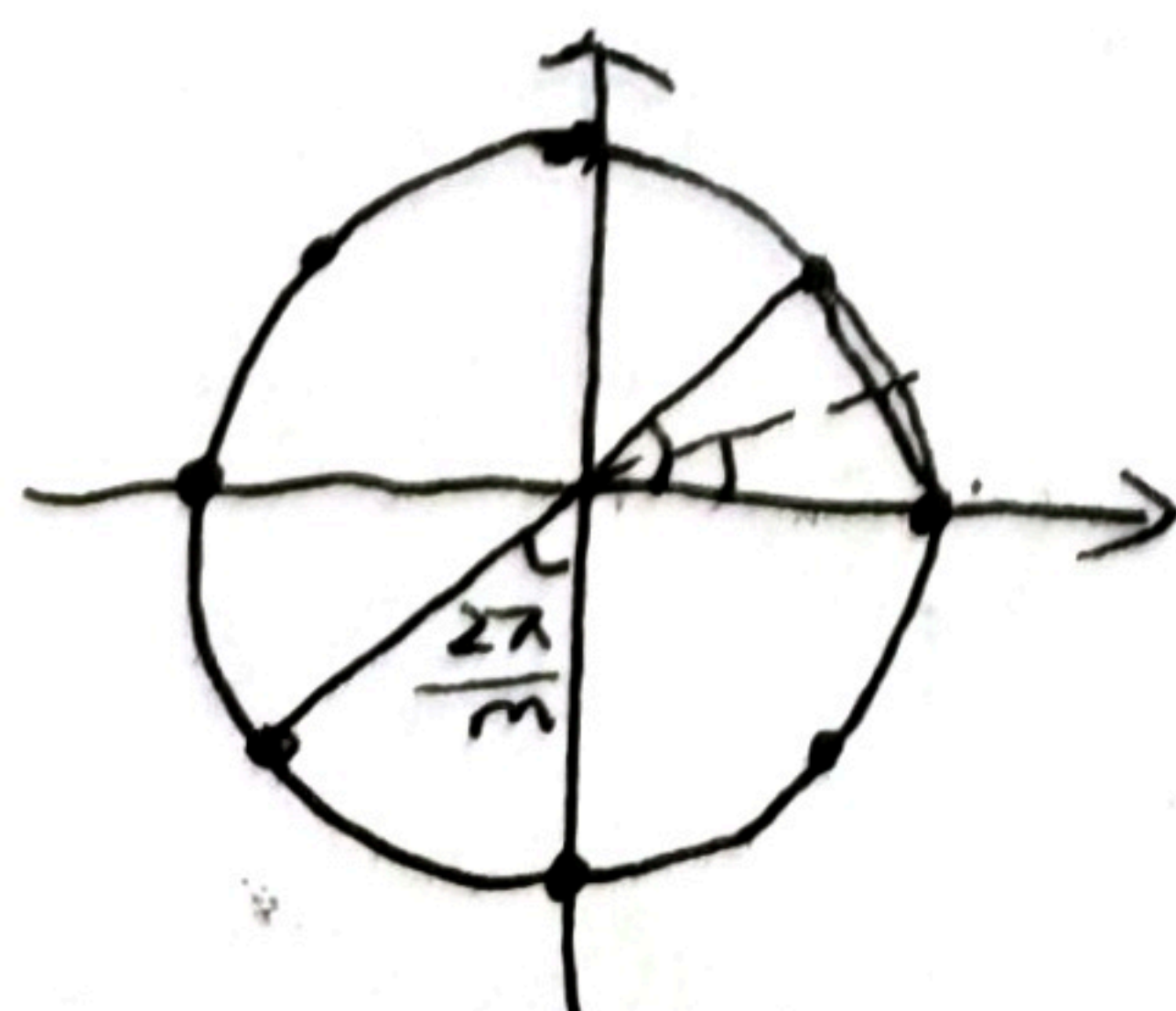
① 产生

$$s_i(t) = f_T(t) \cos \left(2\pi f_c t + \frac{2\pi(i-1)}{m} \right)$$

$$= \cos \left(\frac{2\pi(i-1)}{m} \right) f_T(t) \cos(2\pi f_c t)$$

$$+ \sin \left(\frac{2\pi(i-1)}{m} \right) f_T(t) (-\sin(2\pi f_c t))$$

$$[f_1(t), f_2(t)] = \sqrt{\frac{2}{E_p}} [f_T(t) \cos(2\pi f_c t), -f_T(t) \sin(2\pi f_c t)]$$



$$d_{\min} = 2 \cdot \sqrt{E_s} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{m} \cdot \frac{1}{2} \right)$$

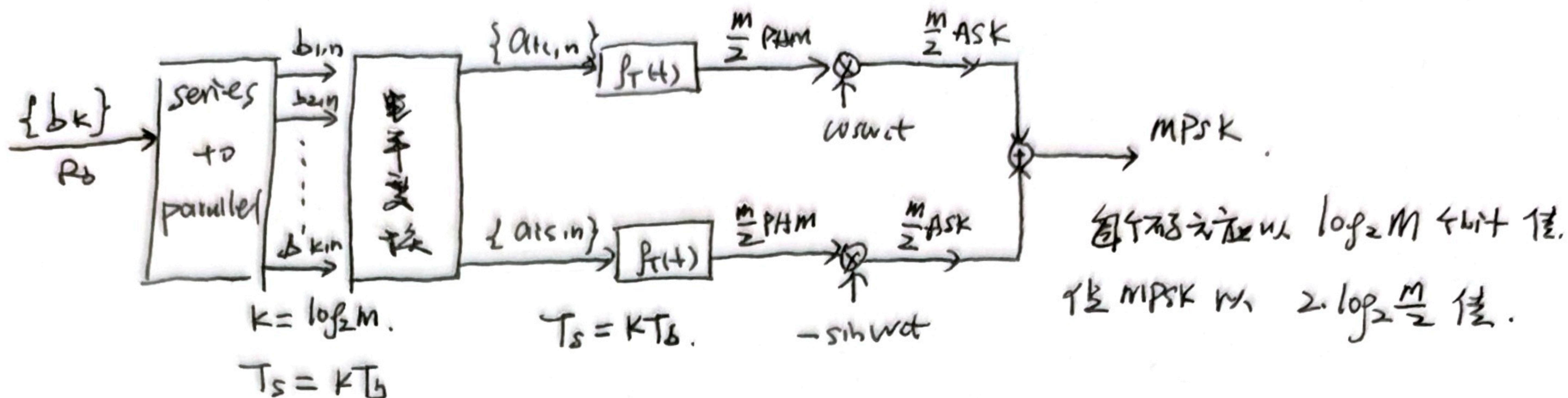
$$= 2 \sqrt{E_s} \sin \left(\frac{\pi}{m} \right)$$

$$\vec{s}_i = [\langle s_i(t), f_1(t) \rangle, \langle s_i(t), f_2(t) \rangle]$$

$$= \sqrt{\frac{E_p}{2}} \left[\cos \left(\frac{2\pi(i-1)}{m} \right), \sin \left(\frac{2\pi(i-1)}{m} \right) \right]$$

$$\triangleq \sqrt{E_s} [a_{ic}, a_{is}]$$

MASK 有 $a_{ic}^2 + a_{is}^2 = 1$ 的限制.



MFSK 需要两路 $\frac{M}{2}$ ASK 的合成。其 PSD 也是 $2 \times \text{PSD} \left\{ \frac{M}{2} \text{ASK} \right\}$ 。

② 接收及误码率。

各路 I/Q 路投影再 ML 判决。



使用沿箭头方向的 Gaussian 投影
 误码率误码上升。

也可求 2 路 $\frac{M}{2}$ ASK 的误码率，再合成，但 α 不等间距。

对于 QPSK，相等间距，可以很简单的计算误比特率和误码率，需根据具体的形式具体分析，将 $\rightarrow \text{map} \rightarrow$ 再具体分析误码率。

3. 振幅调制 (QAM)。

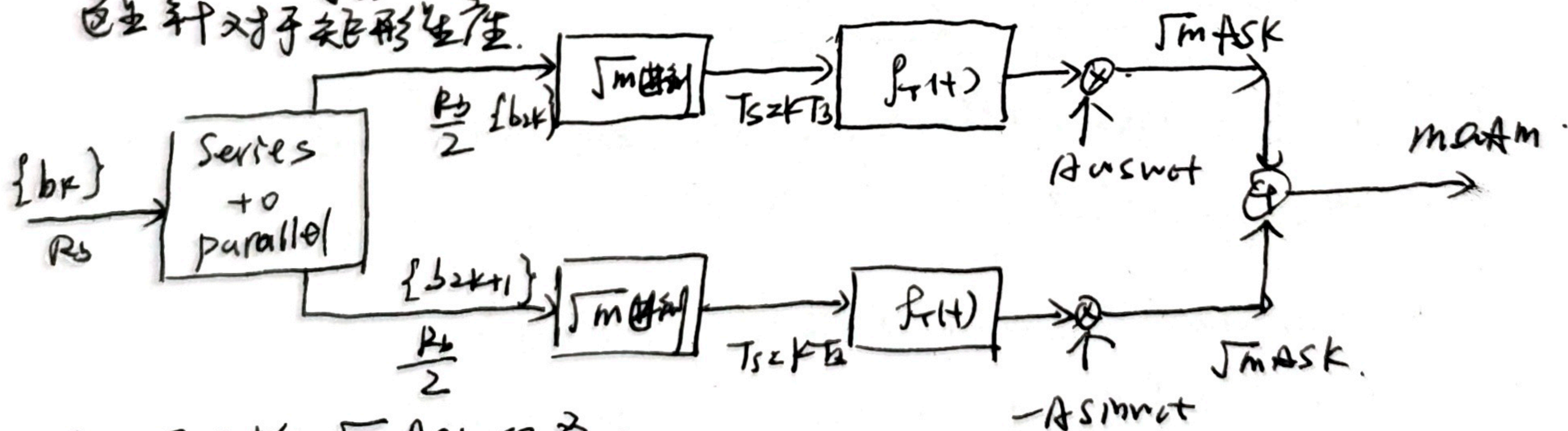
① 产生 PSD。

振幅形式与 MFSK 一致，或可用展开展示的式理解。

$$s_{QAM} = a_{ic} f_T(t) \cos \omega_c t - a_{is} f_T(t) \sin \omega_c t. \quad (\text{不再存在 } a_{ic}^2 + a_{is}^2 = 1 \text{ 的限制})$$

$$= a_{ic} \sqrt{\frac{E_p}{2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{E_p}} f_T(t) \cos \omega_c t \right) - a_{is} \sqrt{\frac{E_p}{2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{E_p}} f_T(t) \sin \omega_c t \right)$$

$\vec{s}_i = \sqrt{\frac{E_p}{2}} [a_{ic}, a_{is}]$ 。可以设计成各种各样的二维星座形式。
 通常对于矩形星座。



PSD 是两路 $\sqrt{m}$ ASK 的叠加。

② 接收及误码。

$$P_e = 1 - (1 - P_{\sqrt{m}})^2, \text{ where } P_{\sqrt{m}} = \frac{\sqrt{m}-1}{\sqrt{m}} \text{erfc} \left(\frac{\alpha_{\min}}{\sqrt{4N_0}} \right)$$

各路 I/Q 路最优接收。

4. M 进制移频键控 (MFSK)。

① 产生。

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T_s}} \cos(2\pi f_c t + 2\pi i f_d t)$$

$$= \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos[2\pi(f_c + i f_d)t]$$

$$\vec{s} = [s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{iM}]$$

$$\text{where } s_{ij} = \langle s_i, f_j(t) \rangle$$

$\|\vec{s}_i\|^2 = \|\vec{s}\|^2$ ，每个 signal (线性无关的)，MFSK
 用 M 维或一维，它们的维数都是 E_s 。

通过 $\rho_{km} = \frac{\langle s_k, s_m \rangle}{\sqrt{E_s} \sqrt{E_s}} = \frac{\langle s_k(t), s_m(t) \rangle}{E_s}$, 当 $\Delta f = \frac{1}{2T_b}$ 时, 波形正交, 此时为 2FSK.

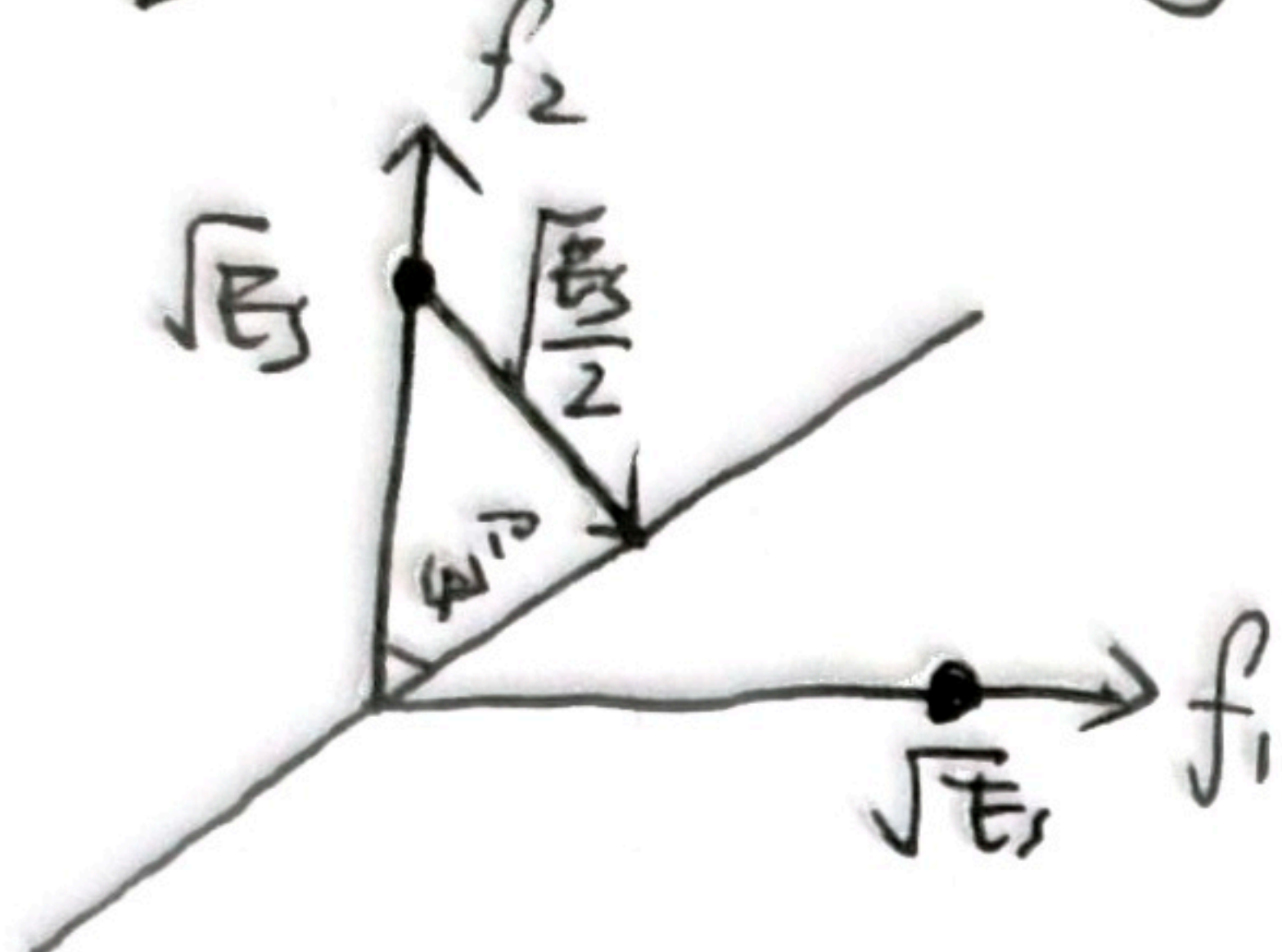
$\vec{s}_i = [\sqrt{E_s}, 0, \dots, 0]$ 是一个高维高值向量, 产生线性组合分解.

② 接收.

2FSK project 接收, 可以应用 $\sqrt{E_s} + n_1, n_2$ 的波进行单个情况的计算.

具体需 $\max_{\vec{r}} \int \dots \int p(r_1, \dots, r_m | s_i) d\vec{r}$ 来得到使似然最大的 $\vec{s}_i$ 判决.

值得注意的, 对于 2 维情况



可以将 Gaussian 向量垂直于箭头方向作 project.

从而得到误码率 $P(e) = \frac{1}{2} \text{erfc}(\frac{\sqrt{E_s}}{2\sigma})$

(该式与 $\sqrt{E_s} + n_1, n_2$ 相同). 与 2FSK 的一致.

5. 综合比较.

(1) 对于具体情况, 一般画出生成图分析, 上述理论只起直觉作用.

(2) 关于 m 进制调制带宽与频带利用率.

MASK, MPSK, MQAM:

$$B = \begin{cases} 2R_s = \frac{2R_b}{\log_2 m}, & \text{NRZ} \\ 2 \frac{1+\alpha}{2} R_s = \frac{(1+\alpha)R_b}{\log_2 m}, & \text{RRC} \end{cases}$$

MFSK:

$$\eta = \frac{2 \log_2 m}{m} \propto \frac{\log_2 m}{m}$$

$$\eta = \frac{R_b}{B} = \begin{cases} \frac{\log_2 m}{2} \\ \frac{\log_2 m}{1+\alpha} \end{cases}$$

随着 m 的变大, MASK, MPSK, MQAM 利用率上升, MFSK 利用率下降.

(3) 对于格雷编码, MASK, MPK, MQAM 的误码率 $P_b(e) = \frac{1}{k} P_s(e)$, 每符号比特误码率.

(4) MASK, MPSK, MQAM 的 η 相同, 但相同 E_b/N_0 条件下,

$m > 2$ 的 MPSK 的 P_s 小于 MASK, $m > 4$, MQAM 小于 MPSK.

MASK, MPSK, MQAM $\rightarrow$ 随 m 增高而最佳选择

随着 m 的增加, MASK, MPK, MQAM 的 P_s 上升, 但 MFSK 的 P_s 下降.

m 越大, MPSK 的抗噪声能力越强.

六. 采样, 量化, 编码.

1. 低通采样.

Nyquist theorem. $f_s \geq 2f_H$, $2f_H$ 为 Nyquist 采样速率.

2. 带通采样.

Theorem
Band Sampling

带通信号受限在 $[f_L, f_H]$, 全 $B = f_H - f_L$, f_H 可以写为 $f_H = (K+m)B$, K 为最大整数, m 为小数部分.

$\eta f_{smm} = 2(1 + \frac{m}{K})B$, 当 f_H 足够大时, $f_{smm} \rightarrow 2B$

3. 标量量化

model
量化器

$$x \rightarrow \boxed{\text{量化器 } Q(\cdot)} \rightarrow Q(x) = y_k, x \in [x_{k-1}, x_k)$$

$$x \text{ 的功率 } S = E x^2 = \int x^2 p(x) dx$$

$$y \text{ 的功率 } S_Q = E y^2 = \sum_k q_k y_k^2, \text{ where } q_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} p(x) dx$$

$$E_Q \text{ 的功率 } E_Q = E (y-x)^2 = \int (y-x)^2 p(x) dx = \sum_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} (y_k - x)^2 p(x) dx = \sum_k q_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} (y_k - x)^2 \frac{p(x)}{q_k} dx$$

$$\text{可以定义量化 SNR, } \left(\frac{S}{N_Q} \right) = \frac{E x^2}{E e^2} = \frac{E x^2}{E (y-x)^2}$$

model
均匀量化器

工作范围为 $(-V, +V)$, 将 $(-V, +V)$ 均匀分割为 m 个长为 $\Delta = \frac{2V}{m}$ 的量化区间, 量化边界为 $x = -V, -V+\Delta, \dots, V-\Delta, V$, 量化电平为每个区间的中心, $y_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2}$

Lemma

对于上述均匀量化器, $\left(\frac{S}{N_Q} \right)$ 有很好的表达式形式, 即 $\left(\frac{S}{N_Q} \right) = m^2$

均匀量化器
的量化 SNR.

Theorem

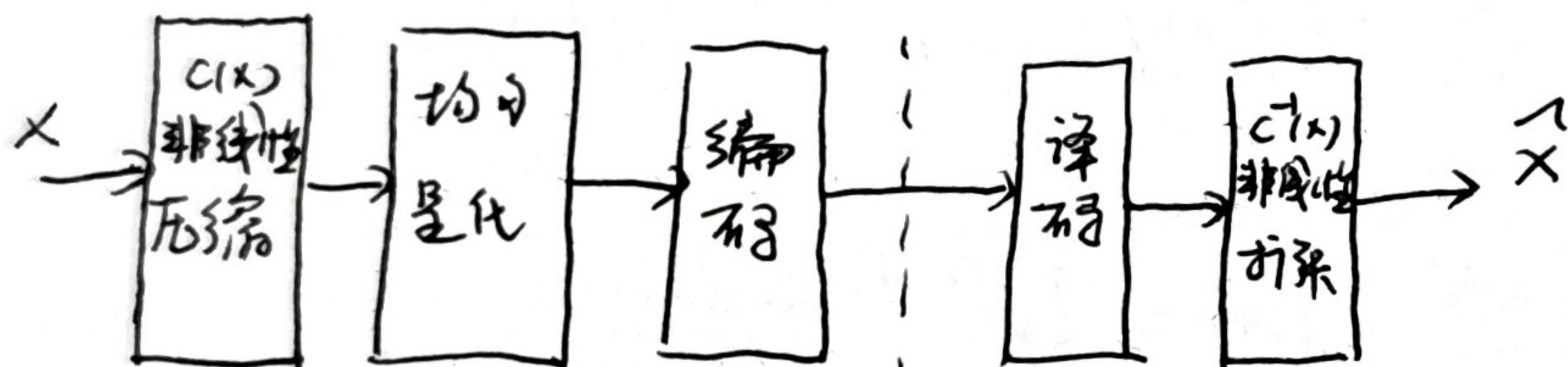
满足 Lloyd-max 条件的量化器为 MSE 意义下的最优量化器.

Optimal
量化器

$$x_{k,opt} = \frac{1}{2} (y_{k,opt} + y_{k-1,opt}), \quad y_{k,opt} = \frac{\int_{x_{k-1,opt}}^{x_{k,opt}} x \frac{p(x)}{\int_{x_{k-1,opt}}^{x_{k,opt}} p(x) dx} dx$$

$x_{k,opt}$ 为 $y_{k,opt}$ 的中点, $y_{k,opt}$ 为 $x_{k-1,opt}, x_{k,opt}$ 的质心.

model
对数量化

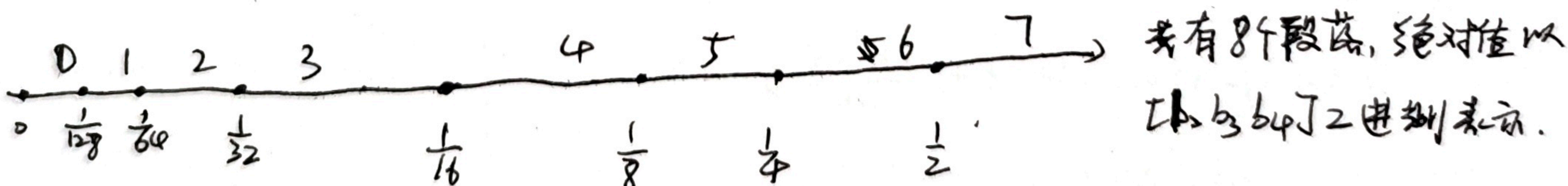


$C(x)$ 可以是对数压缩特性, A-law 或 μ -law, 常近似表示, A-law 13折, μ -law 15折.

4. 脉冲编码调制 (PCM)

PCM 标准采用对数化打码和 JBC (折叠码), 每个样值 8 个 bit $[b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8]$.

$[b_1]$ 是极性码, 0 或 1, $[b_2, b_3, b_4]$ 是段落码



$[b_5, b_6, b_7, b_8]$ 对每个段落内再分为 16 个均匀量化区间, value 落在哪个区间, 就呈对应的 2 进制.

解码时, 先用 $[b_1]$ 找到极性, 用 $[b_2, b_3, b_4]$ 找到对应段落 (正负轴中的段落), 再取

$[b_5, b_6, b_7, b_8]$ 确定量化间隔中间值作为量化电平. (PCM 的 $f_s = 8 \text{ kHz}$, $R_s = 64 \text{ k bits/s}$)

Remark

如果信号 $\in [-V, V]$, 不需先归一化到 $[-1, 1]$, $\frac{m(t)}{(\max |m(t)|)}$, 再进行处理.

$$\text{ex. 例如段落码为 } 110, \text{ 段内 } 1001, |value| = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \cdot \frac{9}{16} = 0.55625$$

5. 时分复用 (TDM)

发送时间 T_c 远小于 T_s , 可以在每样时发送多路信号, $R_b = N \cdot R_b$ (N 路信号合成).

6. 码字复接

将时分复用电路将多路信号合并为一路, 一次 T_s 中每个时隙, 用时隙 n 个 bit, $R_b = f_s \times N \times n = 2.048 \text{ M bit/s}$.

通信原理

1. 平稳随机过程 (周期). Cyclostationary

Define. $\exists T, s.t. m(t+T)=m(t) \& R_x(s+T, t+T)=R_x(s, t)$

即均值和自相关都是 Stochastic process 周期性的

Theorem $X(t)$ is a Cyclostationary w.r.t. T , Let $\theta \sim U(0, T)$, Then $Y(t) = X(t+\theta)$ must be W.S.S.

proof. $E[Y(t)Y(s)]$

$$= E[X(s+\theta)X(t+\theta)]$$

$$= E_{\theta} E_x [X(s+\theta)X(t+\theta)]$$

$$= E_{\theta} [R_x(s+\theta, t+\theta)]$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T R_x(s+\theta, t+\theta) d\theta$$

$$\stackrel{\theta'=s+\theta}{\Rightarrow} \frac{1}{T} \int_s^{T+s} R_x(\theta', t+s+\theta') d\theta'$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T R_x(\theta', t-s+\theta') d\theta' \quad (\text{周期性})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t-s=\tau \\ \theta'=t \end{array} \right. \Rightarrow \frac{1}{T} \int_0^T R_x(t, \tau+t) dt$$

$$= \underline{R_x(t, \tau)} \quad (\text{时平均})$$

$$= R_x(\tau)$$

□

Remark 非平稳过程的谱都是非良定义的, 对于周期平稳, 在对周期平稳进行谱分析时, 系谱分析的谱不是它自身, 而是分析的 $Y(t)$, 那已经对 $X(t)$ 进行了周期化, 如此一来, 便可以分析良定义的谱.

2. Cyclostationary 的应用 $\rightarrow$ PAM

Model A signal $s(t) = \sum_n a_n g_T(t-nT_s)$, And we want to get PSD of $s(t)$. Assume $\{a_n\}$ is W.S.S.

Analysis $R_s(t, s) = E[s(t)s(s)]$

$$= E \left[\sum_n \sum_m a_n a_m g_T(t-nT_s) g_T(s-mT_s) \right]$$

$$= \sum_n \sum_m R_a(m-n) g_T(t-nT_s) g_T(s-mT_s)$$

无法分析出 $R_s(t, s)$ 是只依靠 $(s-t)$ 的, 实际上, $s(t)$ 非平稳

我们试图验证其周期平稳, 从而多折它解谱.

$$R_X(t+T, s+T) = \sum_m \sum_n R_X(m-n) g_T(t-nT_s) g_T(s-mT_s)$$

$$\begin{cases} m' = -t+m \\ n' = -t+n \end{cases} \Rightarrow \sum_m \sum_n R_X(m'-n') g_T(t-n'T_s) g_T(s-m'T_s)$$

$$= \sum_m \sum_n R_X(m-n) g_T(t-nT_s) g_T(s-mT_s)$$

$$= R_X(t, s)$$

我们验证了 $R_X(t, s) = R_X(t+T, s+T)$, $x(t)$ ($s(t)$, 类似) 循环平稳, 表现在现利用 Theorem 1. 求其对应的平稳过程相关.

$$\overline{R_X(t+T, s+T)} = \frac{1}{T} \int R_X(t+\tau, s+\tau) d\tau$$

这直接用时平均来表示.

$$\overline{R_X(t, t+\tau)} = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_m \sum_n R_X(m-n) g_T(t-nT_s) g_T(t+\tau-mT_s) dt$$

$$t' = t+\tau-mT_s \Rightarrow \frac{1}{T} \int_{\tau-mT_s}^{\tau-mT_s+T_s} \sum_m \sum_n R_X(m-n) g_T(t'-\tau+(m-n)T_s) g_T(t) dt$$

$$= \frac{1}{T} \sum_m \sum_n R_X(m-n) \int_{\tau-mT_s}^{\tau-(m-1)T_s} g_T(t'-\tau+(m-n)T_s) g_T(t) dt'$$

$$k = m-n \Rightarrow \frac{1}{T} \sum_k R_X(k) \int_{\tau-mT_s}^{\tau-(m-1)T_s} g_T(t'-\tau+kT_s) g_T(t) dt'$$

$$= \frac{1}{T} \sum_k R_X(k) \sum_m \int_{\tau-mT_s}^{\tau-(m-1)T_s} g_T(t'-\tau+kT_s) g_T(t) dt'$$

$$= \frac{1}{T} \sum_k R_X(k) \int_{-\infty}^{+\infty} g_T(t'-\tau+kT_s) g_T(t) dt'$$

$$= \frac{1}{T} \sum_k R_X(k) \int_{-\infty}^{+\infty} g_T(t) dt$$

$$= \frac{1}{T} \sum_k R_X(k) R_g(-\tau+kT_s)$$

$$= \frac{1}{T} \sum_k R_X(k) R_g(\tau-kT_s) = R_Y(\tau)$$

现在我们求出了非平稳过程对应的 WSS 过程相关, 接下来求 PSD.

$$\mathcal{F}[\overline{R_X(t, t+\tau)}] = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_k R_X(k) R_g(\tau-kT_s) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$= \frac{1}{T} \sum_k R_X(k) \int_{-\infty}^{+\infty} R_g(\tau-kT_s) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$t = \tau-kT_s \Rightarrow \frac{1}{T} \sum_k R_X(k) e^{j\omega kT_s} \int_{-\infty}^{+\infty} R_g(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{T} \sum_k R_X(k) e^{j\omega kT_s} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} R_g(t) e^{-j\omega t} dt}_{\text{FT.}}$$

DTFT (类似)

FT.

重述一下最后的式子

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[\overline{R_X(t, t+L)}] &= \frac{1}{T} \sum_k R_a(k) e^{-j2\pi k f T_s} \int_{-\infty}^{+\infty} R_g(t) e^{-j2\pi f t} dt \\
 &= \frac{1}{T} \sum_k R_a(k) e^{-j2\pi k f T_s} \otimes P_g(f) \\
 &= \frac{1}{T} P_a(f) \underbrace{P_g(f)}_{E_g(f) \text{ 能量谱密度}} \\
 &= \frac{1}{T} P_a(f) |G(f)|^2
 \end{aligned}$$

其中, $\{a_n\}$ 的 PSD $P_a(f) = \sum_k R_a(k) e^{-j2\pi k f T_s}$

$g(t)$ 的 PSD $P_g(f) = |G(f)|^2$ (By Define)

可见, 被调制信号 $f_T(t)$ 是能量信号.

Remark $P_a(f) = \mathcal{F}[R_a(m)] = \sum_m R_a(m) e^{-j2\pi f T_s m}$

联想 Signal & System, DSP. 有 $\Omega T_s = \omega$. ($2\pi f T_s = \omega$)

在此处依然有这些频率之间的关系, 因为离散傅里叶变换, 自然会有指数上多乘一个 T_s . $e^{-j2\pi f T_s m} \rightarrow f T_s$ 为模拟频率.

<继续考虑 $P_a(f)$ >

由上述已得到 $P_a(f) = \sum_k R_a(k) e^{-j2\pi f T_s k}$, 现在对该 W.S.S. 过程进行分解, 令 $a_n = c_n + m_a$, m_a 为 a_n 的 mean, 且 $E[c_n] = 0$, 有.

$$\begin{aligned}
 R_a(m) &= E[(c_n + m_a)(c_{n+m} + m_a)] \\
 &= E[c_n^2 + c_n m_a + c_{n+m} m_a + m_a^2] \\
 &= m_a^2 + E[c_n c_{n+m}]
 \end{aligned}$$

$$R_a(m) = \begin{cases} \sigma^2, m=0 \\ 0, \text{other} \end{cases} \Rightarrow \underline{m_a^2 + R_c(m)} \Rightarrow R_a(m) = \begin{cases} m_a^2 + \sigma^2, m=0 \\ m_a^2, m \neq 0 \end{cases}$$

有 $P_c(f) = \sigma^2$

对 $R_a(m)$ 进行 FT. (DTFT).

$$P_a(f) = \mathcal{F}[m_a^2 + R_c(m)]$$

$$= P_c(f) + \mathcal{F}[m_a^2]$$

$$= \sigma^2 + \mathcal{F}[m_a^2]$$

$$= \sigma^2 + \sum_n m_a^2 e^{-j2\pi f T_s n}$$

现在来研究 $\sum_n m_a^2 e^{-j2\pi f n T_s}$

$$\text{考虑冲激串 } \sum_n \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_m e^{j2\pi \frac{m}{T} t} \quad (FS)$$

$$\text{令 } t=f, T=f_0, \sum_n \delta(f - n f_0) = \frac{1}{f_0} \sum_m e^{j2\pi \frac{m}{f_0} f}$$

$$\text{令 } f_0 = \frac{1}{T_s}, \sum_n \delta(f - \frac{n}{T_s}) = T_s \sum_m e^{j2\pi m T_s f}$$

$$\text{整理, 有, } \sum_m e^{j2\pi f T_s m} = \frac{1}{T_s} \sum_n \delta(f - \frac{n}{T_s})$$

$$\text{令 } k = -m, \sum_k e^{j2\pi f T_s k} = \frac{1}{T_s} \sum_n \delta(f - \frac{n}{T_s})$$

于是, 我们证明了 $\sum_n e^{-j2\pi f n T_s} = \frac{1}{T_s} \sum_n \delta(f - \frac{n}{T_s})$, 频域意义的展开.

$$\text{则 } P_a(f) = P_c(f) + \mathcal{F}[m_a^2]$$

$$= \frac{\sigma^2}{T_s} + \frac{m_a^2}{T_s} \sum_n \delta(f - \frac{n}{T_s})$$

$$\text{代入 } P_s(f) = \frac{1}{T_s} P_a(f) |G(f)|^2$$

$$\text{则 } P_s(f) = \frac{\sigma^2}{T_s} |G(f)|^2 + \frac{m_a^2}{T_s^2} \sum_n \delta(f - \frac{n}{T_s}) |G(\frac{n}{T_s})|^2$$

< 另知另一种方式推导 $P_s(f)$ >

$$s(t) = \sum_n a_n g_T(t - nT_s) = g_T(t) * \sum_n a_n \delta(t - nT_s)$$

$$\triangleq g_T(t) * d(t) \quad \left(\begin{array}{l} \text{Hint: } P_{st}(f) = \frac{1}{T_s} P_a(f) \\ P_d(f) = \frac{1}{T_s} P_a(f) \end{array} \right)$$

$$\text{where } d(t) = \sum_n a_n \delta(t - nT_s)$$

$$d(t) = \sum_n a_n \delta(t - nT_s) = \sum_n (C_n + m_a u_n) \delta(t - nT_s)$$

$$= \sum_n C_n \delta(t - nT_s) + \sum_n m_a u_n \delta(t - nT_s)$$

①式就是我们之前分析过的 $d(t)$, $\frac{1}{T_s} P_d(f) = \frac{1}{T_s} P_c(f) = \frac{\sigma^2}{T_s}$ (循环不转移)

$$\text{②式} = m_a \sum_n u_n \delta(t - nT_s) = m_a \frac{1}{T_s} \sum_n e^{j2\pi \frac{n}{T_s} t}$$

$$P_{\text{②}}(f) = \frac{m_a^2}{T_s^2} \sum_n \delta(f - \frac{n}{T_s})$$

$$\text{则有 } P_d(f) = P_{\text{①}}(f) + P_{\text{②}}(f)$$

$$= \frac{\sigma^2}{T_s} + \frac{m_a^2}{T_s^2} \sum_n \delta(f - \frac{n}{T_s})$$

$$P_s(f) = P_d(f) |G(f)|^2$$

$$= \frac{\sigma^2}{T_s} |G(f)|^2 + \frac{m_a^2}{T_s^2} \sum_n \delta(f - \frac{n}{T_s}) |G(\frac{n}{T_s})|^2$$

< 补充 >

$$P_f\{ \sum_n e^{j2\pi \frac{n}{T_s} t} \}$$

$$= \sum_n P_f\{ e^{j2\pi \frac{n}{T_s} t} \}$$

(各项不相关(欧拉公式))

$$R_r\{ e^{j2\pi \frac{n}{T_s} t} \} = e^{j2\pi \frac{n}{T_s} t}$$

$$P_f\{ e^{j2\pi \frac{n}{T_s} t} \} = \delta(f - \frac{n}{T_s})$$