# 电磁场与电磁波.

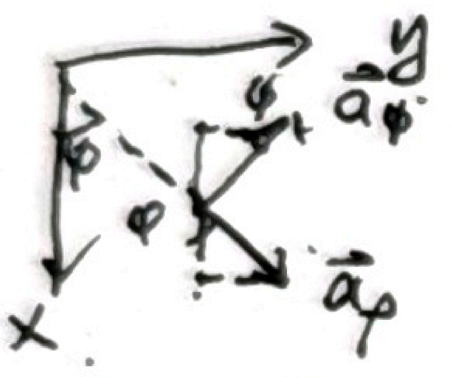
## Electromagnetic Field theory Fundamentals.

## 一、Vector Analysis.

### 1、基本坐标系.

a. 圆柱坐标系. Cylindrical coordinate system.

$\vec{a}_\rho$ 与 $\vec{a}_\varphi$ 不是单方向，在被积函数同时含有 $\vec{a}_\rho$ 和 $\vec{a}_\varphi$ 时，须要坐标变换.



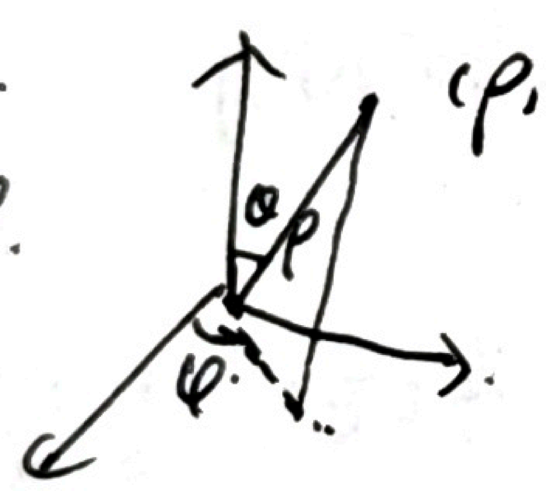
$$\vec{a}_\rho = \vec{a}_x \cos\varphi + \vec{a}_y \sin\varphi$$
$$\vec{a}_\varphi = -\vec{a}_x \sin\varphi + \vec{a}_y \cos\varphi$$
移相90°(+)

$x=\rho\cos\varphi$.
$y=\rho\sin\varphi$.

只有φ固定，那在φ给定的平面内才相加成.

b. 球坐标系. Spherical coordinate system.

$x = r\sin\theta\cos\varphi$.
$y = r\sin\theta\sin\varphi$.
$z = r\cos\theta$.



$(\rho, \theta, \varphi)$.

$(x,y,z) \overset{T}{\mapsto} (\rho,\theta,\phi)$.

$$T = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix}$$

与柱坐标系一样，不同φ, θ, 不可相加成.

### 2、梯度. $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$

方向导数. $\frac{df}{dl} = \nabla f \cdot \frac{d\vec{l}}{dl} = \nabla f \cdot \vec{a}_l$, where $\nabla = \vec{a}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{a}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{a}_z\frac{\partial}{\partial z}$.

Cylindrical coordinate: $\nabla = \frac{\partial}{\partial \rho}\vec{a}_\rho + \frac{\partial}{\rho\partial\phi}\vec{a}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\vec{a}_z$.

Spherical coordinate: $\nabla = \frac{\partial}{\partial \rho}\vec{a}_\rho + \frac{\partial}{\rho\partial\theta}\vec{a}_\theta + \frac{\partial}{\rho\sin\theta\partial\varphi}\vec{a}_\phi$

∇的分母是长度微分！

### 3、散度. divergence $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$.

直角坐标系：$\nabla\cdot\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}F_x + \frac{\partial}{\partial y}F_y + \frac{\partial}{\partial z}F_z$.

Cylindrical coordinate: $\nabla\cdot\vec{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}[\rho F_\rho] + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}[F_\varphi] + \frac{\partial}{\partial z}F_z$.

Spherical coordinate: $\nabla\cdot\vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2F_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta F_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}F_\varphi$.

**Theorem** (Div) $\vec{F}$ 在面积 S 包围区域可微，有.

$$\iiint_V \nabla\cdot\vec{F}\,dv = \oiint_S \vec{F}\cdot d\vec{s}.$$

**Remark** 通量可以用散度体积分来表示.

4. 旋度 curl/rotation. $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$.

$\vec{F}$的curl表$\vec{F}$沿闭合路径线积分的measure.

直角：$\nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$ 柱：$\nabla\times\vec{F} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \vec{a}_\rho & \rho\vec{a}_\phi & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\phi & F_z \end{vmatrix}$ 球：$\nabla\times\vec{F} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \vec{a}_r & r\vec{a}_\theta & r\sin\theta\,\vec{a}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ F_r & rF_\theta & r\sin\theta\,F_\phi \end{vmatrix}$.

注意性质：$\nabla\times\nabla f=0$，即梯度场的旋度为0.，若$\nabla\times\vec{F}=0$，$\vec{F}$可写成$-\nabla f$来处理.

__Theorem__ Stocks. $\iint_S \nabla\times\vec{F}\cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l}$

应注意，旋度方向垂直于平面.

5. Laplace operator.

$$\nabla^2 f = \nabla\cdot\nabla f = \frac{\partial^2}{\partial x^2}f + \frac{\partial^2}{\partial y^2}f + \frac{\partial^2}{\partial z^2}f \text{，} \nabla^2 f = 0 \Rightarrow f \text{为调和函数}.$$

$$\nabla^2\vec{F} = \nabla^2 F_x\,\vec{a}_x + \nabla^2 F_y\,\vec{a}_y + \nabla^2 F_z\,\vec{a}_z.$$

柱：$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right] + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

球：$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$.

6. Helmholtz Theorem.

__Basic__ $\nabla\times\nabla U=0$ and $\nabla\cdot\nabla\times\vec{A}=0$.

即梯度的散度为0，旋度的散度为0.

__Helmholtz Theorem__

全空间$\mathbb{R}^3$内单值，连续，有界的矢量场$\vec{F}$，可以分解成势(无~~旋~~散)矢量场和无旋矢量场之和，即

$$\vec{F} = -\nabla\Phi + \nabla\times\vec{A}\text{, where } \nabla\cdot\vec{A}=0 \text{ (Coulomb's gauge)}.$$

标量函数$\Phi$为$\vec{F}$的标量位函数($-\nabla\times\nabla\Phi=0$)，$\vec{A}$为$\vec{F}$的势矢量位函数($\nabla\cdot\nabla\times\vec{A}$)

__Theorem__ Unique.1. $\boxed{\text{vector}}$ In limited region, any vector field can be uniquely determined by its curl, divergence and the boundary conditions.

__Theorem__ Unique.2. ~~se~~$\boxed{\text{scalar}}$ (分离变量法求解V的基本出) The solution is unique if it satisfies both the Laplace's equation (or Poission's equation) and the boundary conditions.

二、静电场. Electrostatics.

1. 电场力与电场强度.

**Theorem** Coulomb. $\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1q_2}{R_{12}^2}\vec{a}_{12}$ （$q_2$对$q_1$产生的电场力）.

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1q_2}{R_{12}^3}(\vec{r}_1-\vec{r}_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1-\vec{r}_2).$$

Coulomb力无法描述超距的作用于是有了field的概念.

**Theorem** E. $\vec{E} = \lim_{q_t\to0}\frac{\vec{F}}{q_t} = \lim_{q_t\to0}\frac{q_t\vec{E}}{q_t} = \sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$.

**Remark** 求电场强度时 $\vec{E}=\int d\vec{E} = \int\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}\cdot dq$.

可以根据对称性或其它进行判断，当情况对称性好时可直接对求和进行~~处理~~.

3. 电通量和电通密度.

**Define** electric flux density. $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$ （真空中）.

And we can use electric flux density $\vec{d}$ to define the electric flux: $\Psi = \int_s \vec{D}\cdot d\vec{s}$.

**Remark** 电通量，或电通量密度（flux），与媒介无关.

**Theorem** Gauss's law. $\Psi = \oint_s \vec{D}\cdot d\vec{s} = Q$ （Q为封闭曲面S包裹的自由电荷）.

By divergence theorem, $\Psi = \int_v \nabla\cdot\vec{D}\,dv = \int_v \rho_v\,dv$, $\nabla\cdot\vec{D} = \rho_v$.

于是，电通量（flux）密度被认为是区域内自由电荷多少的一个measure.

4. 电位，电偶极子.

考虑 $\nabla\times\vec{E}=0$，可以利用矢量运算等式 $\nabla\times\nabla f=0$，令E为一个标量场的gradient.

外力做功，势场增加，于是

**Define** V. $\nabla\times(-\nabla V)=0$, $\vec{E}=-\nabla V$, $V_{ab} = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{l} = V_a - V_b$.

$V_a = -\int_\infty^a \vec{E}\cdot d\vec{l}$（绝对电位，∞点为电位0点）.

注意，无需直接V来叠加，须要具体分析，对电位也可使用 $\int dV = \int\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dq}{r}$ 求解.

对于点电荷 $V\propto\frac{1}{r}$，对于电偶极子，$V\propto\frac{1}{r^2}$.（electric dipole）.

且对点电荷 $\vec{E}\propto\frac{1}{r^2}$，对于电偶极子，$E\propto\frac{1}{r^3}$

## 5、电场中的物质.

a. 导体：拥有大量自由电子 (conductor). $\sigma=\infty$，$\vec{E}$ 和 $\vec{J}$ 都不可存在.

孤立导体为电中性，稳态情况下，导体内部 $\rho_v=0$，但是在导体也可存在面电荷(感应电荷)，感应电荷与外电场叠加，使得导体内部 $\vec{E}=0$，则导体为等势体，内部即无 $\rho_v$ 也无 $\vec{E}$

Hint：在说理想电介质时，也可能会假设不能绝对理想，对 $\sigma=0$ 存在，但 $\varepsilon$ 有异，即也可能被极化，但没有电流

$\sigma=0$，可有 $\vec{E}$，不可能有 $\vec{J}$.

b. 理想电介质、绝缘体 (ideal dielectric, insulator)，无自由电子

c. 非理想电介质(导电性电介质) $\underbrace{\sigma\neq0\text{，有}\vec{E}\text{也有}\vec{J}}$，且可以被极化.

存在 polarized 现象，polarized时，$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}=\varepsilon_0\vec{E}+\varepsilon_0\chi\vec{E}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}=\varepsilon\vec{E}$.

$\varepsilon_r$ → 相对电容率或介质常数

所以 Gauss's theorem 才使用 $\nabla\cdot\vec{D}$ 定义：

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho_v,\quad \nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho_v+\rho_{vb}}{\varepsilon_0}$$ → 束缚面密度.

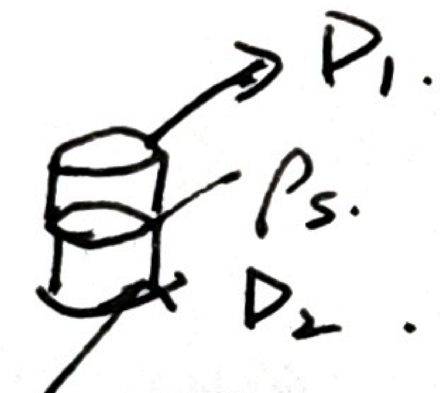
注意，介质中的电场强度 $\vec{E}$ 随 $\varepsilon$ 的增大而下降.

## 6. 电场中的储能.

$$W=\int w\,dv,\ \text{where } w=\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}=\frac{1}{2}\varepsilon E^2=\frac{1}{2}\frac{D^2}{\varepsilon}.$$

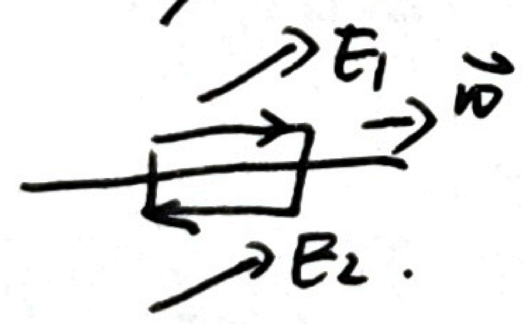
## 7. Boundary conditions.

$D_{n1}-D_{n2}=\rho_s$.




注意 $\vec{n}$ 定义的方向，Gauss 面方向向外. 所以是 $D_{n1}-D_{n2}=\rho_s$.

$E_{1t}-E_{2t}=0$.



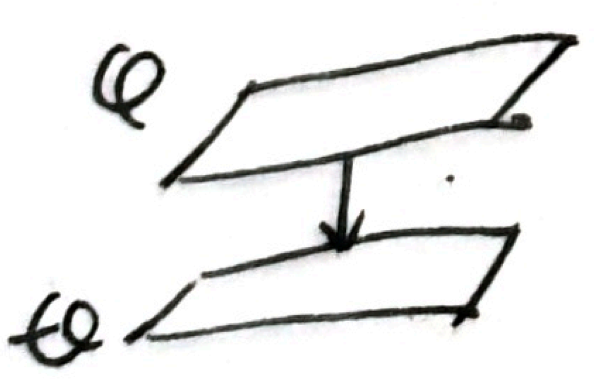

无旋场 $\vec{E}_1\cdot\vec{n}+\vec{E}_2\cdot(-\vec{n})=0$.

$E_{1t}-E_{2t}=0,\ E_{1t}=E_{2t}$.

注意：若为两个面在不同介质间，若非特意设置，一般不存在 $\rho_s$.

## 8. Capacitor (理想介质填充 → 无漏电).

两块导体组成的系统，无论何种形状，具有等量异号电荷，可以定义电容为 $C=\frac{Q}{V}$，Q为某导体上电荷量，V为两导体间电位差，定义的值.




$E=2\cdot\frac{\rho_s}{2\varepsilon}=\frac{\rho_s}{\varepsilon}$. $\quad C=\frac{Q}{V}=\frac{\rho_s A}{\rho_s \frac{d}{\varepsilon}}=\frac{A\varepsilon}{d}$.

$V=\frac{\rho_s d}{\varepsilon}$. 即电容可定义的值为 $\frac{A\varepsilon}{d}$，不论何种形状导体

由 $C=\frac{A\varepsilon}{d}$ 也可看出，电容是导体之间的本征特性，与 1) 导体尺寸形状 2) 导体间距 3) 媒质的电容率相关，电容器储能 $W=\frac{1}{2}\int\varepsilon E^2dv=\frac{1}{2}CV^2$.

求解：无论题目给定条件，都可假设一块导体上有面电荷 Q，再求 V, C 然后 $C=\frac{Q}{V}$，注意，用 $\vec{E}$ 求 V 时要找准 0 电位位置. $-\int_{(x,y,z)}\vec{E}\cdot d\vec{l}$ 作为绝对电位起点.

Remark：若题目给定 $V_0$，可以列 Laplace 方程求解.

$\frac{\partial^2V}{\partial x^2}=0\Rightarrow V=ax+b$ | $\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\rho\frac{dV}{d\rho}=0\Rightarrow V=a\ln\rho+b$ | $\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{dV}{dr}=0\Rightarrow V=\frac{a}{r}+b$.

# 三、恒定电流 Steady Current

## 1、电流 Current 以及 电阻 Resistance

本章节只考虑传导电流 (conduction current)，由导体中"电子流动所产生的电流。
这种情况下，导体两边有电位差，不是等位体，并且有欧姆定律成立：

Ohm's law. $\vec{J}=\sigma\vec{E}$.

$\sigma$ 为电导率 (conductivity)，导体 $\sigma\to\infty$，理想电介质 $\sigma\to 0$ ($\varepsilon=\varepsilon_0$)；理想电介质(不是那个理想) $\sigma\to 0$ ($\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0$)

非理想电介质，$\sigma\neq 0$ or $\infty$ and $\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0$，本书只讨论前面的三者。

$\vec{J}$ 为体电流密度，与电流有关系：$I=\int\vec{J}\cdot d\vec{s}$.

另外的，有电阻率，resistivity $\rho=\frac{1}{\sigma}$.

**Theorem Ohm**

$$dR=\frac{dV}{I}=\frac{-\vec{E}\cdot d\vec{l}}{I}，则\ R=\frac{-\int\vec{E}\cdot d\vec{l}}{\int\vec{J}\cdot d\vec{s}}=\frac{V_{ab}}{I}.$$

通过 Ohm 定律，可以求出一个导体的电阻，注意是对于哪个面的电阻。

$R_1$ $R_2$

## 2、电流连续性方程

**Theorem 电荷守恒 Kirchhoff**

$$i(t)=\oint\vec{J}\cdot d\vec{s}=-\frac{dQ}{dt}=-\int\frac{\partial\rho_v}{\partial t}dv，则\ \nabla\cdot\vec{J}=-\frac{\partial}{\partial t}\rho_v.$$

在恒定电流场中，有 $\rho_v$ 是 const，$\boxed{\nabla\cdot\vec{J}=0}$，那电流密度无散。

该定理表明，通过任一闭合曲面的净恒定电流为 0.

**method**

由于电流的连续性定理是非常强的定理，在求解关于恒定电流的任何问题时，都可以假设导体"中存在的电流 $I$，并进而有 $J=\frac{I}{A(x,y,z)}$ → 揭示密度

然后由 Ohm's theorem $\vec{E}=\frac{\vec{J}}{\sigma}$，进而确定 $R, V, I, \rho_s, D$ 等等。

## 3、焦耳定律

**Theorem Joule's law**

单位体积功率 $p=\vec{J}\cdot\vec{E}$，线性导体的焦耳热功率

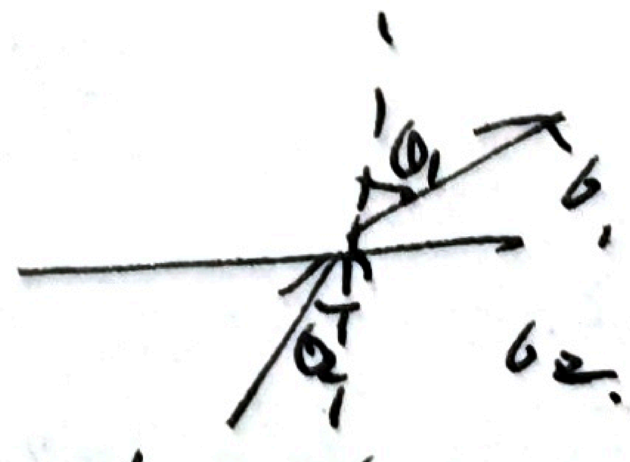
$$P=\int p\,dv=\int\vec{J}\cdot\vec{E}\,dv=\int\sigma E^2dv.$$

等价形式：$P=I^2R=\frac{V^2}{R}$，注意，Joule's law 描述的是功率，并不是能量。

## 4. Boundary conditions.

连续性方程：$J_{n1}=J_{n2}$

由电场切向连续：$E_{t1}=E_{t2}\Rightarrow\frac{J_{t1}}{\sigma_1}=\frac{J_{t2}}{\sigma_2}$



则 $\frac{J_{t1}}{J_{t2}}=\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ (同除 $J_n$) $\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}=\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ ($\theta$ 为法线夹角)

由 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\sigma_1,\sigma_2$，还可由 J和E的关系，E和D的关系推出面电荷密度。

3、统一比较 $\vec{D}$ 和 $\vec{J}$，G 和 C

$\nabla\cdot\vec{J}=0 \qquad \nabla\times\vec{J}=0$

$\nabla\cdot\vec{D}=0 \qquad \nabla\times\vec{D}=0$ （无电荷区）

$J_{n1}=J_{n2} \qquad E_{t1}=E_{t2} \Rightarrow \frac{J_{t1}}{\sigma_1}=\frac{J_{t2}}{\sigma_2}$

$D_{n1}=D_{n2} \qquad \frac{D_{t1}}{\varepsilon_1}=\frac{D_{t2}}{\varepsilon_2}$

即，以 $\vec{J}$ 作变量的方程和用以 $\vec{D}$ 作变量的方程得到，只需 $\vec{J}\leftrightarrow\vec{D}$，$\varepsilon\leftrightarrow\sigma$.

D与J在无电荷区域关系类似

又有 $R=\frac{V}{I}$，$C=\frac{Q}{V}$，$RC=\frac{V}{I}\frac{Q}{V}=\frac{Q}{I}=\frac{\int\rho_s ds}{\int J_n ds}=\frac{\varepsilon\int E_n ds}{\sigma\int E_n ds}=\frac{\varepsilon}{\sigma}$.

即 $RC=\frac{C}{G}=\frac{\varepsilon}{\sigma}$，电容与电导(电阻)的倒数也存在密切联系.

Method 一个非理想的介质电流问题与理想介质(绝缘)的电位移问题一致.
可以只求一个的某种参数或变量，之后来之后 $\sigma\leftrightarrow\varepsilon$ 互换即得另外一个的变量.

Example 特别是对于 G 和 C，如果有 $C=f(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$，那么 $G=f(\sigma_1,\sigma_2)$.

具体的 $C=\frac{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1\ln\frac{c}{b}+\varepsilon_2\ln\frac{b}{a}}$，则 $G=C|_{\varepsilon_1=\sigma_1,\varepsilon_2=\sigma_2}=\frac{2\pi\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1\ln\frac{c}{b}+\sigma_2\ln\frac{b}{a}}$.

至于为什么需要非理想，理想介质求解 因为 $\vec{D}$, $\vec{J}$ 只有 $\boxed{\text{无电荷区域}}$ (对D来说) 相似.

四、静磁场 magnetic field (magnetostatics)

1. 基本定律

magnetic flux density，磁通密度

Theorem (毕奥萨伐尔 law) $\quad d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I d\vec{l}\times\vec{a}_R}{R^2} \qquad \vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_C\frac{I d\vec{l}\times\vec{a}_R}{R^2}$

Theorem (Ampère's force law) 载流导体置于外磁场时，所受磁力为：$\vec{F}=\int_C I d\vec{l}\times\vec{B}$

Remark 在均匀磁场中，弯曲导线所受的磁力等效为直导线受的磁力.
使用这两个定律解题时，需要选好坐标系并表示出 $d\vec{l}$, $\vec{B}$，在柱面坐标系中
$\vec{a}_\rho=\vec{a}_x\cos\phi+\vec{a}_y\sin\phi$，$\vec{a}_\phi=-\sin\phi\,\vec{a}_x+\cos\phi\,\vec{a}_y$，与 $\phi$ 有相关性.

2. 磁通量和磁矢位

Define 磁通 (magnetic flux)：$\Phi=\int_S\vec{B}\cdot d\vec{s}=\int_S\nabla\times\vec{A}\cdot d\vec{s}\overset{\text{Stokes}}{=}\oint_C\vec{A}\cdot d\vec{l}$.

公理 磁力线闭合(磁通线闭合) $\oint_S\vec{B}\cdot d\vec{s}=0$，$\nabla\cdot\vec{B}=0$，磁通密度场 divergence-free

Define 定义 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$ ($\nabla\cdot\nabla\times\vec{A}\equiv0$)，$\vec{A}$ 为 magnetic vector potential，磁矢位.
并有 Coulomb's gauge，$\nabla\cdot\vec{A}=0$. $\vec{A}$ 为 $\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I d\vec{l}}{R}$.

Remark 因为 $\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I d\vec{l}}{R}$，所以 $\vec{A}$ 与电流流向同方向.

3. 磁场强度，安培环路定律，磁介质（磁性材料）

定义自由空间的磁场强度 $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ ($\vec{B}=\mu_0\vec{H}$).

Theorem (Ampère's circuital law) 安培定律.

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I$$

Remark 根据 Ampère's circuital law，有 $\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}_v\cdot d\vec{S} = \int_S \nabla\times\vec{H}\cdot d\vec{S}$

即 $\nabla\times\vec{H} = \vec{J}_v$，此为安培定律的微分形式.

物质的磁化，在有外磁场的情况下，物质（磁性材料）的磁偶极子在介质中沿磁场方向排列的过程，注意，电偶极子排列削弱外电场而磁偶极子的排列加强外磁场，考虑磁化时

$$\vec{B} = \mu_0[\vec{H}+\vec{M}], \quad \nabla\times\vec{H} = \nabla\times\left[\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right] - \nabla\times\vec{M}$$

所以 Ampère circuital 是对 H 定义 $\nabla\times\vec{H}=\vec{J}_v$ 的，考虑了~~磁性~~磁化的情况.

对于未磁化导体，B 也有 $\nabla\times(\mu\vec{H}) = \nabla\times\vec{B} = \mu_0 I$，磁化后，有

$$\vec{B} = \mu_0(1+\chi)\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H} = \mu\vec{H}.$$

4. Boundary Conditions.

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow B_{n1}=B_{n2}.$$

$$\nabla\cdot\vec{H} = \vec{J}_v \Rightarrow H_{t1}-H_{t2} = J_S$$

面电流密度由 $H_{t1}$ 右手法则确定. $H_{t1}>H_{t2}$，$J_S>0$，$H_{t1}$ 右手法则方向一致.

电导率有限的磁介质表面 $J_S=0$，$H_{t1}=H_{t2}$，只有 $J_v$

物质之一为完全导体，$J_S$ 存在于完全导体表面上，它产生的磁场与外部磁场抵消，使得完全导体内部无磁场，即完全抗磁体，超导.

稳态导体（理想，完全）内部无电场且无磁场.

Remark $H_{t1}=H_{t2} \Rightarrow \frac{B_{t1}}{\mu_1}=\frac{B_{t2}}{\mu_2}$，$\frac{B_{t1}}{B_{t2}} \Big/ \frac{B_{n1}}{B_{n2}} = \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$

恒定电流场有 $\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}=\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$，由 J 和 E 的相似性或电场的边界条件.

无自由电荷区域 $\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$.

可以发现 $\vec{B}$, $\vec{D}$, $\vec{J}$ 之间的类比，都有"折射定律" w.r.t. ($\mu,\varepsilon,\sigma$)

5. 磁场中的能量.

这里直接给出结论 $w_m = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H} = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{B^2}{2\mu}$，$W=\int\frac{1}{2}\mu H^2 dv$

电场：$w_m = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$ | $W=\int w_m dv$ 能量

恒定电流场：$p_m = \vec{J}\cdot\vec{E} = \sigma E^2$ | $P=\int p_m dv$ 功率

磁场：$w_m=\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}=\frac{1}{2}\mu H^2$ | $W=\int w_m dv$ 能量.

# 6. 电感 Inductance.

<u>Define</u> 磁链 (magnetic flux linkage) $\lambda = N\Phi = \int d N\Phi$ ⇒ 当 $N<1$ 时，也有固定量存在
定义单位电流变化的磁链变化为电感 (inductance).

$$L = \frac{d\lambda}{di} = \frac{dN\Phi}{di} \xRightarrow[\text{电流}]{\text{恒定}} \frac{\int dN\Phi}{I} = \frac{N\Phi}{I}$$

→ $N\geq 1$ 时(整数) 可直接已算 $\Phi$，再 $\int$ 恒再 $\times N$.

Self-Inductance $\begin{cases} \text{Outer Self-inductance: m-field pass through the wire loop.} \\ \text{Inner Self-inductance: m-field pass through the conductor.} \end{cases}$

Mutual-Inductance: $\lambda$ is induced by $I_1$ and across $C_2$, while the inductance is rate of $\lambda$ over $I_1$. $M_{12} = M_{21}$.

<u>Remark</u> 还可以由能量来算 $L$.

$$W = \frac{1}{2}LI^2 = \int \frac{1}{2}\mu H^2 dv.$$

可以先用 $H$ 求出 $W$，再由 $W=\frac{1}{2}LI^2$ 算出 $L$. 注意，必须得有"体积" $dv$.

注意，有时讨论  的总自感，需要 $L=$ 内自感 $+$ 外自感.

<u>Method</u> 场能量，总量再求法.

电：$W = \int w_m dv = \int \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} dv = \int \frac{1}{2}\varepsilon E^2 dv$，电容 $W = \frac{1}{2}CV^2$

磁：$W = \int w_m dv = \int \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H} dv = \int \frac{1}{2}\mu H^2 dv$，电感 $W = \frac{1}{2}LI^2$.

# 五、静态场的边值问题.

<u>Theorem</u> 既满足 Laplace (possion) equation，又满足边界条件的电位解是 Unique 的.

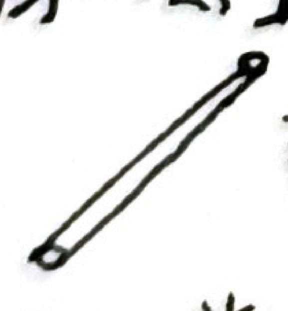
<u>Define</u> 三类边界问题：<u>Dirichlet problem</u>, <u>Neumann problem</u>, <u>Hybrid problem</u>.
field on boundary; field partial differential in normal direction; Both.

1、分离变量法. 见笔记细致描述，按题形式套法.

2、镜像法. Method of Images.

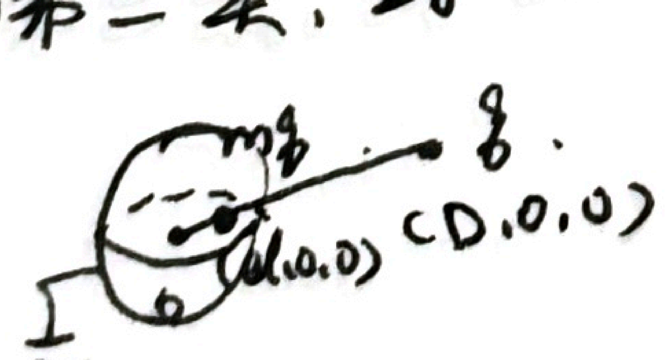
<u>Question</u> 电荷旁边有无法忽略的大导体，由电荷感应作用强烈，使用镜像法求解.

① 第一类，直观照镜子.



带电细棒 $\rho_l$，点电荷 $q$，其镜像 $q'=-q$，于镜像面（地面或其它）的另一侧高度 $h$ 处.

② 第二类，球（注意，区分接地与不接地情况，不接地时，m有 $q'$，$q'+mq=Q$）$\rightarrow$ 导体电荷，地面总电荷相同.

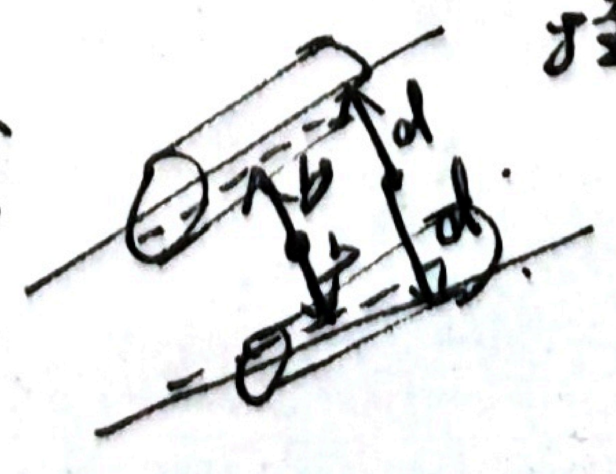


只要记住 $d = \frac{R^2}{D}$.
m可直接由此推出，
$\frac{mq}{R_1} + \frac{q}{R_2}\Big|_{r=R} = 0 \Rightarrow m = -\frac{R}{D}$

注意，镜像法只对导体外的场有效. 且对接地导体而言，原导体的面电荷之和（总量）与对应镜像电荷量.

③ 第三类，柱.

则在柱内也有柱状电棒 $\rho_l$，距离 $d = \frac{R^2}{D}$.



柱导体靠近，$+\rho_l$，$-\rho_l$.

$b = \sqrt{d^2 - R^2}$.

# Maxwell's equations and Electromagnetic Field (Wave).

## 一、时变电磁场.

### 1. maxwell's equation's 以及边界条件.

**Theorem**
法拉第电磁感应.

法拉第定律. $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\Phi = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{s} \Rightarrow \int \nabla\times\vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\cdot d\vec{s}$

全电流定律. $\oint_c \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int \vec{J}_c + \vec{J}_d \cdot d\vec{s} = \int \vec{J}_c + \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}\cdot d\vec{s}$

**Remark**
Displacement current

(1) maxwell 对安培定律做出修正，假设在电容器中存在 displacement current，即真空 ($\sigma=0$) 中也可以存在"电流"这个概念的. $\vec{J}_{total} = \vec{J}_{conduction} + \vec{J}_{displacement}$.

$\nabla\cdot\vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\rho_v = \nabla\cdot(\vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}) = 0$. $\vec{J}_{total}$ 满足电流连续性方程，则电容器中的 Displacement current (位移电流) 等于导线中的 Conduction current (传导电流)

(2) 漏电电容器中 (不完美绝缘)，$\vec{J}_c$ 和 $\vec{J}_d$ 同时存在，完美电容器中只有 $\vec{J}_d$.

**LAW**
Maxwell.

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\vec{D} = \rho_v \\ \nabla\cdot\vec{B} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s} \\ \oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{s} \\ \oint \vec{D}\cdot d\vec{s} = \int \rho_v \, dv \\ \oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0 \end{cases}$$

**LAW**
Constitutive equation.

$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, $\vec{J} = \sigma\vec{E}$, $\vec{B} = \mu\vec{H}$

$\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$, $\mu = \mu_r\mu_0$.

**LAW**
Boundary Condition.

$E_{t1} = E_{t2}$, $D_{n1} - D_{n2} = \rho_s$ $\quad \vec{a}_n\times(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$, $\vec{a}_n\cdot(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s$

$H_{t1} - H_{t2} = J_s$, $B_{n1} = B_{n2} \leftrightarrow \vec{a}_n\times(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s$, $\vec{a}_n\cdot(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$

$J_{n1} = J_{n2}$, $\frac{J_{t1}}{\sigma_1} = \frac{J_{t2}}{\sigma_2}$ $\quad \vec{a}_n\times(\frac{\vec{J}_1}{\sigma_1} - \frac{\vec{J}_2}{\sigma_2}) = 0$, $\vec{a}_n\cdot(\vec{J}_1 - \vec{J}_2) = 0$.

**Remark**
媒介质.

(1) 完全导体 ($\sigma\to\infty$) 内部，电磁场不存在，表面可以有 $\rho_s$ 和 $\vec{J}_s$ 存在.

(2) 导体 ($\sigma<\infty$, $\sigma\neq0$) 内部可存在时变场，$\vec{J}_s$ 不存在，$\rho_s$ 可存在.

(3) 完全电介质 ($\sigma=0$) 内部可存在时变场. $\vec{J}_s$ 不存在，$\rho_s$ 若非特别放置也不存在. 电导有限，$\vec{J}_s$ 不可能存在！ 无源. source-free: $\rho_v=0$, $\sigma=0$, $\vec{J}=0$.

### 2. Poynting's theorem.

**Theorem**
Poynting

$$\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) + \vec{J}\cdot\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\mu H^2 + \frac{1}{2}\varepsilon E^2\right] = 0$$

$$\int \nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})\,dv + \int \vec{J}\cdot\vec{E}\,dv + \int \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\mu H^2 + \frac{1}{2}\varepsilon E^2\right]dv = 0.$$

**Remark** 物理含义 (1) $\vec S=\vec E\times\vec H$ 为 Poynting vector, 或 Power flow density.

表示 EM-energy across per unit area during unit time.

(2) $p=\vec J\cdot\vec E$，欧姆功率损耗，power of heat energy.

(3) $w_m=\frac{1}{2}\mu H^2$, $\frac{\partial}{\partial t}w_m$, The rate of change of stored magnetic energy.

$w_e=\frac{1}{2}\varepsilon E^2$, $\frac{\partial}{\partial t}w_e$. The rate of change of stored electrical energy.

(4) 所以 Poynting theorem 也可以写为

$$\nabla\cdot\vec S+p+\frac{\partial}{\partial t}[w_e+w_m]=0.$$

3. 时间简谐场的相量分析.

**Define 相量.** 对于时谐场，$\vec E=\hat E_r\cos(\omega t+\theta)=Re\{\hat E_r e^{j\theta}e^{j\omega t}\}$，称 $\hat E_r e^{j\theta}$ 为 $\vec E$ 的复数相量 $\dot{\vec E}$

即 $\vec E=Re\{\dot{\vec E}e^{j\omega t}\}$，对于 $\vec E$，有特性 $\frac{\partial\vec E}{\partial t}=Re\{j\omega\dot{\vec E}e^{j\omega t}\}$，所以在方程中对 $\vec E$ 求时间导数等价于 $\dot{\vec E}$ 乘 $j\omega$.

**Remark 1** 表达形式 共有3种常见的电磁简谐场表达方式.

(1) Instantaneous function. $\vec E=\hat E(r)\cos(\omega t+\theta(r))\vec a_r$ (或 Transient function).

(2) Complex form $\vec E=\hat E(r)e^{j\theta(r)}e^{j\omega t}$

(3) Complex phasor $\dot{\vec E}=\hat E(r)e^{j\theta(r)}$

**Remark 2** Poynting. 复相量定义下. $\hat S=\frac{1}{2}[\dot{\vec E}\times\dot{\vec H}^*]$ $\langle\hat S\rangle=\frac{1}{2}Re[\dot{\vec E}\times\dot{\vec H}^*]$.

二、平面波在自由空间中的传播. (这里的自由指的是无限大介质). (无界空间).

1. 一般波动方程.

对于无源场的导电媒质.

$$\nabla^2\vec E=\mu\sigma\frac{\partial\vec E}{\partial t}+\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec E}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2\vec H=\mu\sigma\frac{\partial\vec H}{\partial t}+\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec H}{\partial t^2}.$$

对于一般导体.

$$\nabla^2\dot{\vec E}=\mu\sigma j\omega\dot{\vec E}-\omega^2\mu\varepsilon\dot{\vec E}=(j\omega\sqrt{\mu\hat\varepsilon})^2\dot{\vec E}=\hat\gamma^2\dot{\vec E}$$

where $\hat\gamma=j\omega\sqrt{\mu\hat\varepsilon}=j\omega\sqrt{\mu\varepsilon(1-j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon})}=\alpha+j\beta$.

2. 在一般的情形，导体中的平面波.

设 $\dot{\vec E}(z)=(\hat E_f e^{-\hat\gamma z}+\hat E_b e^{\hat\gamma z})\vec a_x\Rightarrow\dot{\vec H}=\frac{\nabla\times\dot{\vec E}}{-j\omega\mu}$

propagation constant: $\hat\gamma=j\omega\sqrt{\mu\hat\varepsilon}=j\omega\sqrt{\mu\varepsilon(1-j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon})}$, intrinsic (wave impedance) $\hat\eta=\sqrt{\frac{\mu}{\hat\varepsilon}}$

**Property** (1) 有损 ($\sigma\neq0$) 介质中，$\vec H$ 比 $\vec E$ 相位滞后.

(2) Complex permittivity $\hat{\varepsilon} = \varepsilon(1-j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon})$，$|\hat{\varepsilon}| > \varepsilon$.

$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$为 $\tan\delta$，损耗正切角，由于电磁性损耗测量.

(3) $\hat{\gamma} = j\omega\sqrt{\mu\hat{\varepsilon}} = \alpha + j\beta$，$\alpha$为 attenuation constant，$\beta$为相位常数

注：课程中定义了 wave vector $\vec{\beta} = \beta_x\vec{a_x} + \beta_y\vec{a_y} + \beta_z\vec{a_z}$，对应形式为

$E_x = \hat{E}_x e^{-j\beta_x\vec{a_x}} e^{-j\beta_y\vec{a_y}} e^{-j\beta_z\vec{a_z}}$，$\vec{\beta}$是用于描述传播方向和波长的量.

(4) 有$\sigma$的存在 wave 是 attenuated (damped) wave，$\sigma$越大，衰减越快.

可以定义 $\delta_c$ (skin depth) 为电磁波衰减为进入平面时 e 的距离.

$E(\delta_c) = E_0 \cdot \frac{1}{e}$，电子反映衰减的是 $e^{-\alpha z}$ 项，$e^{-1}$ 对应 $z = \frac{1}{\alpha}$ 的时候

即 $\delta_c = \frac{1}{\alpha}$.

(5) 可以定义波的传播速度 (phase 速度) $u_p = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi/\beta}{2\pi/\omega} = \frac{\omega}{\beta}$

相速如果与频率无关，媒质非色散 (nondispersive)，与频率相关，dispersive

对于本课程，导体是 dispersive medium，电介质是 nondispersive medium.

但是 dispersive 不只发生在导体中，waveguide 中也有色散.

3、$\sigma=0$ 时，理想电介质中的平面波. (perfect dielectric)

(1) $\beta$有特殊形式，即 $\hat{\gamma} = j\omega\sqrt{\mu\hat{\varepsilon}} = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = j\beta$，$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$.

(2) $u_p = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} \triangleq \frac{c}{n} \rightarrow$ index of refraction.

有特定 Constant. ~~$\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$~~ $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = 3\times10^8\,m/s$，$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \approx 377\,\Omega$

4. $\sigma \gg \omega\varepsilon$ 时，良导体中的平面波.

(1) 如果 $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \tan\delta \gg 1$，称媒质为 Good Conductor，注意，良导体是针对于媒质和波的频率来说的，只有媒质不能说是良导体

(2) $\hat{\varepsilon} = \varepsilon(1-j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}) \approx -j\frac{\sigma}{\omega}$，通过代替方法用于导体中情况即可.

值得注意的是，$\hat{\gamma} = j\omega\sqrt{\mu\hat{\varepsilon}} = \alpha + j\beta$，此时 $\alpha$ 和 $\beta$ 相同，$\alpha = \beta$.

(3) 在良导体中，波衰减很快，场局限于导体表面附近的区域中，被称为

趋肤效应 (skin effect)

5. wave's polarization.

polarization，给定点 $\boxed{\text{电场}}$ 矢量端点随时间的运动轨迹.

(1) Linear polarization，电场各量同相位，~~$\frac{E_x}{\cos(\omega t)}$~~ $\frac{E_x}{\hat{E}_x} = \frac{E_y}{\hat{E}_y} = \frac{E_z}{\hat{E}_z} = K$.

(2) Circular polarization，$\left(\frac{E_x}{\hat{E}_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{\hat{E}_y}\right)^2 = 1$，且 $\hat{E}_x = \hat{E}_y = E_0$，$E_x^2 + E_y^2 = E_0^2$

圆极化波本身可以看成两个线极化波的叠加（相位差$\frac{\pi}{2}$，相互正交）.

(3) elliptically polarization. $\left(\frac{E_x}{\hat E_{x}}\right)^2+\left(\frac{E_y}{\hat E_y}\right)^2=1$，$\hat E_x\neq\hat E_y$ 或 即不满足也不是 circular 极化.

长焦轴为 $E_{0x}, E_{0y}$ 的 elliptically polarization 可以分解为 $\frac{E_{0x}-E_{0y}}{2}$，$\frac{E_{0x}+E_{0y}}{2}$ 两个 Circular 极化的叠加.

(4) 对于 Circular 和 elliptically polarization，还需要确定左旋（left-hand）还是右旋（right-hand）。右手定则判定即可，大拇指指波传播方向，符合则为右旋，反之，左旋.

Remark 补充. 本章所有的讨论都是TEM（transverse eletromagnetic wave），并且是TEM中的 uniform plane wave，对于沿z方向的 uniform plane wave，$\frac{\partial\vec E}{\partial x}=0$，$\frac{\partial\vec E}{\partial y}=0$.
即z分量所在平面，场的大小和方向不变（对于同一时刻）

## 三、均匀平面波的入射.

### A、平面边界上的垂直入射.

1. 导体-导体分界面，最一般的情况

(1) $\vec E_i=\hat E_0 e^{-\hat\gamma_1 z}\vec a_x$，定义 $\vec E_r=\hat\rho\hat E_0 e^{+\hat\gamma_1 z}\vec a_x$，$\hat\rho=\frac{\hat\eta_2-\hat\eta_1}{\hat\eta_2+\hat\eta_1}$ (reflection coefficient)

(2) $\vec E_i=\hat E_0 e^{-\hat\gamma_1 z}\vec a_x$，定义 $\vec E_t=\hat\tau\hat E_0 e^{-\hat\gamma_2 z}\vec a_x$，其中 $\hat\tau=\frac{2\hat\eta_2}{\hat\eta_2+\hat\eta_1}$ (transmission coefficient).

(3) 注意 $\vec E_i,\vec E_r,\vec H_i,\vec H_r$。$\hat\rho$ 和 $\hat\tau$ 的定义以 E 为主，所以 H 的方向需要保证 $\vec S=\vec E\times\vec H$.

(4) 由于 $\hat\rho,\hat\tau$ 可能是复数，$\vec E_r,\vec H_r,\vec E_t,\vec H_t$ 可能与 $\vec E_i,\vec H_i$ 不同相.

2. $\sigma=0$ 特殊情况，介质-介质

(1) 没什么不同的，$\hat\rho=\frac{\hat\eta_2-\hat\eta_1}{\hat\eta_2+\hat\eta_1}=\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}$，$\hat\tau=\frac{2\hat\eta_2}{\hat\eta_2+\hat\eta_1}=\frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1}$ （$\hat\varepsilon=\varepsilon$）.

(2) $\vec E_i\propto e^{-j\beta_1 z}$，$\vec E_r\propto e^{j\beta_1 z}$，由于传播方向不一致，依然存在相位差.

3. $\sigma\to\infty$ 特殊情况，介质-导体.

(1) $\hat\eta_2=\sqrt{\frac{\mu}{\hat\varepsilon}}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon(1-j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon})}}\xrightarrow{\sigma\to\infty}\hat\eta_2\to0$，$\hat\rho=\frac{\hat\eta_2-\hat\eta_1}{\hat\eta_2+\hat\eta_1}=-1$，$\hat\tau=\frac{2\hat\eta_2}{\hat\eta_1+\hat\eta_2}=0$.（全反射）

(2) 反射的 $\vec E_r$ 和 $\vec H_r$ 与 $\vec E_i$ 和 $\vec H_i$ 进行叠加，形成驻波（pure standing waves）且可以表示.
$\vec E_1(z)=2E_0\sin(\beta_1 z)\sin\omega t\,\vec a_x$，~~其~~ $\vec H_1(z)=\frac{2}{\eta_1}E_0\cos(\beta_1 z)\cos(\omega t)\,\vec a_y$.
注意 $\vec E_1(z)$ 和 $\vec H_1(z)$ 驻波的时间和空间相位差都是 $\frac{\pi}{2}$，同一时间，一个波的波节（node）是另一个波的~~波节~~波腹（loop）（最大处）.

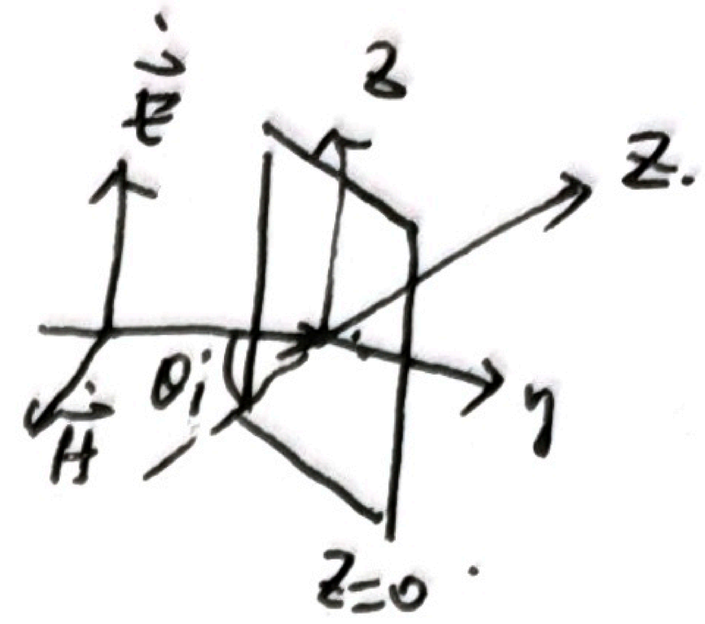
(3) 驻波是不会传播的波，$\langle\vec S\rangle=0$，无有功功率.

Remark 这里关于能量再讨论一下，反射波能量正比于 $\frac{\rho^2}{\eta_1}$，透射波能量正比于 $\frac{\tau^2}{\eta_2}$，它们之间也就是差一个比例系数.
对于介质-介质，$\langle\vec S_i\rangle=\frac{1}{2\eta_1}E_0^2(\vec a_z)$，$\langle\vec S_r\rangle=\frac{1}{2\eta_1}\rho^2E_0^2(-\vec a_z)$，$\langle\vec S_t\rangle=\frac{1}{2\eta_2}\tau^2E_0^2(\vec a_z)$

B. 平面边界上的斜入射 (Oblique incidence).

1. perpendicularly polarized wave (TE波).

① 最一般的情况, 导体-导体分界面.




(1) 垂直极化, 指E垂直于 plane of incidence

$$\vec{E} = \hat{E}_0 e^{-\hat{\gamma}(z\cos\theta_i + y\sin\theta_i)} \vec{a}_x$$

可见波矢量为 $\hat{\gamma}\cos\theta_i \vec{a}_z + \hat{\gamma}\sin\theta \vec{a}_y$, 表明了波长和传播方向.

(2) Snell's law of reflection: $\theta_i = \theta_r$

Snell's law of refraction: $\hat{\gamma}_1 \sin\theta_i = \hat{\gamma}_2 \sin\theta_t$

所以透射波又称折射波 (refracted wave).

(3)
$$\hat{\rho}_n = \frac{\hat{\eta}_2 - \hat{\eta}_1}{\hat{\eta}_2 + \hat{\eta}_1} = \frac{\frac{\hat{\eta}_2}{\cos\theta_2} - \frac{\hat{\eta}_1}{\cos\theta_1}}{\frac{\hat{\eta}_2}{\cos\theta_2} + \frac{\hat{\eta}_1}{\cos\theta_1}}, \quad \hat{\tau}_n = \frac{2\hat{\eta}_2}{\hat{\eta}_2 + \hat{\eta}_1} = \frac{2\frac{\hat{\eta}_2}{\cos\theta_2}}{\frac{\hat{\eta}_2}{\cos\theta_2} + \frac{\hat{\eta}_1}{\cos\theta_1}}$$

(4) 同样, $\hat{\rho}_n$, $\hat{\tau}_n$ 定义以 E 为主, 其计算由 Maxwell equation 和图像搭配计算即可, 注意波矢的方向.

② 无损的情况, 介质-介质分界面.

(1) $\hat{\gamma} = j\beta = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$, $\hat{\eta} = \eta$, 计算方式一致.

(2) $\hat{\gamma}_1 \sin\theta_1 = \hat{\gamma}_2 \sin\theta_2$, $\sin\theta_2 = \frac{\hat{\gamma}_1}{\hat{\gamma}_2}\sin\theta_1$, 当 $\hat{\gamma}_1 > \hat{\gamma}_2$ 且 $\theta_1$ 大于一定角度时会出现 $\sin\theta_2 \geq 1$ 的情况, 称 $\sin\theta_2 = \frac{\hat{\gamma}_1}{\hat{\gamma}_2}\sin\theta_1 = 1$ 时的 $\theta_1$ 为临界角 (critical angle)

(3) 当 $\theta_1$ 为 Critical angle 时, 媒质2中没有沿z轴传播的功率, 而是沿着表面的y轴传播, 此时 $\hat{\rho}_n = 1$, $\hat{\tau}_n = 2$, 所有的能量都被反射回来, 反射功率密度等于入射功率密度, 因此, 临界角又为全反射角 (angle of total reflection)

**Remark**

a) 当 $\hat{\gamma}_1 > \hat{\gamma}_2$, 且 $\theta_1$ 大于临界角时, 垂直极化波都发生全反射, 能量完全反射回来.

b) 其实这里有一个 confusing 的点: 能量完全被反射, 但是, 因为是介质-介质分界面, 媒质2中依然有波, 该波是非均匀平面波, 为倏逝波 (evanescent wave):

1) 沿y轴方向切向于平面 (分界面传播), z方向无实功率.

2) y方向传播的功率是一种局部振荡效应, 有指数衰减和振荡性质, 仅仅反映局部储能效应, 不传播能量.

② $\sigma\to\infty$ 特殊情况，介质—完全导体分界面。

(1) 对于斜入射一致，$\hat{\rho}=\left.\frac{\hat{\eta}_2-\hat{\eta}_1}{\hat{\eta}_2+\hat{\eta}_1}\right|_{\hat{\eta}_2\to 0}=-1$，导体内无电磁波。

(2) 所有能量沿 y 轴传播，且沿 z 轴形成驻波，电和磁的波腹互为波节。所以，合成场没有沿 z 方向的功率流，功率流只在 y 轴方向存在。

(3) 写出表达式如：$E_{1x}=2E_0\sin(\beta z\cos\theta)\sin(\omega t-\beta\sin\theta y)$。

合成波 ~~速~~ 相速 $u_{py}=\frac{\omega}{\beta\sin\theta}>c$。

因为它只是等相位面的速度，用 $u_{py}u_{gy}=u_p^2$，得到群速 $u_g$，才是能量传播的速度。

(4) 我们也可在 z 轴上定义驻波波长 $\lambda_z=\frac{2\pi}{\beta\cos\theta}$

2. parallel polarized wave.（TM 波）

(1) 平行极化以磁场 $\vec{H}_i$ 为主，手段也由 $\nabla\times\vec{E}=-j\omega\mu\vec{H}$ 变成了 $\nabla\times\vec{H}=j\omega\hat{\varepsilon}\vec{E}$

自然的，表达式 $\vec{H}_i=\hat{H}_0e^{-\hat{\gamma}_1(z\cos\theta_i+y\sin\theta_i)}\vec{a}_x$，$\vec{H}_r=\hat{\rho}_p\hat{H}_0e^{-\hat{\gamma}_1(y\sin\theta_i-z\cos\theta_i)}\vec{a}_x$。

$$\vec{H}_t=\underbrace{\frac{\hat{\eta}_1}{\hat{\eta}_2}\hat{\tau}_p}\hat{H}_0e^{-\hat{\gamma}_2(z\cos\theta_t+y\sin\theta_t)}\vec{a}_x.$$

整个定义都让人十分不舒服，其中（其实是以 $\vec{E}$ 为主，不能是从 $\vec{H}$ 角度推导）。

$$\hat{\rho}_p=\frac{\hat{\eta}_1\cos\theta_1-\hat{\eta}_2\cos\theta_2}{\hat{\eta}_1\cos\theta_1+\hat{\eta}_2\cos\theta_2},\quad \hat{\tau}_p=\frac{2\hat{\eta}_2\cos\theta_1}{\hat{\eta}_1\cos\theta_1+\hat{\eta}_2\cos\theta_2}.$$

可以把 $\frac{\hat{\eta}_1}{\hat{\eta}_2}\hat{\tau}_p$ 理解为一个整体，$1+\hat{\rho}_p=\frac{\hat{\eta}_1}{\hat{\eta}_2}\hat{\tau}_p$.

<介质—介质分界面>.

(1) 无耗时把 $\hat{\eta}$ 换为 $\eta$，$\hat{\gamma}$ 换为 $j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$.

(2) 对于平行极化波，有全折射现象，当 $\theta_i=\theta_p$，$\tan\theta_p=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$ 时，只有折射。

此时 $\hat{\rho}_p=0$，~~$\hat{\tau}_p$~~ $\frac{\hat{\eta}_1}{\hat{\eta}_2}\hat{\tau}_p=1$，$\theta_p$ 被称为 Brewster's angle (polarizing angle).

注：对于垂直极化波，因为全反射 $\hat{\gamma}_1\sin\theta_1=\hat{\gamma}_2\sin\theta_2\Rightarrow\sin\theta_1=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$，$\tan\theta_p=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$，二者对应同一个值，全折射和全反射不同时发生。

(3) 平行极化波既可全折射又可全反射，垂直极化波只可全反射不可能全折射。

(4) 当入射波以垂直，平行两种分量以 Brewster 角入射时，反射波只有垂直分量，透射波。

Circular 或 elliptically 极化反射后形成线极化，所以叫 polarizing angle.

〈介质-完全导体分界面〉.

$$\hat{\rho}_p = \left.\frac{\hat{\eta}_1\cos\theta_1 - \hat{\eta}_2\cos\theta_2}{\hat{\eta}_1\cos\theta_1 + \hat{\eta}_2\cos\theta_2}\right|_{\hat{\eta}_2\to 0} = 1.$$

与前面都不一样，$\hat{\rho}_p = 1$. 除此之外，按 $\dot{H}_i \to \dot{E}_i \to \dot{H}_r \to \dot{E}_r$ 的计算方式进行计算.
最后与分界面平行方向有平均功率传递，法向方向为驻波，无能量传播

四、矩形波导 (rectangular waveguide).

(1) TE: $\dot{H}_z = \hat{H}_{zm}\cos(\frac{m\pi}{a}x)\cos(\frac{n\pi}{b}y)e^{-\hat{\gamma}z}$

TM: $\dot{E}_z = \hat{E}_{zm}\sin(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)e^{-\hat{\gamma}z}$.

所以 $TM_{mn}$ 的 m和n 是不可为0的，TM的最低次模是 $TM_{11}$.
对于TE，最低次模可能是 $TE_{01}$，也可能是 $TE_{10}$，$a>b$ 时 $TE_{10}$.

(2) $\hat{\gamma} = \sqrt{(\frac{m\pi}{a})^2+(\frac{n\pi}{b})^2-\omega^2\mu\varepsilon} = \alpha+j\beta$.

$\omega_{cmn}^2\mu\varepsilon = (\frac{m\pi}{a})^2+(\frac{n\pi}{b})^2$，当 $\omega<\omega_{cmn}$ 时，该 mn model 不存在.

当 $\omega>\omega_{cmn}$ 时，$\hat{\gamma} = \sqrt{\omega_{cmn}^2\mu\varepsilon-\omega^2\mu\varepsilon} = j\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon-\omega_{cmn}^2\mu\varepsilon} = j\beta_{mn}$.

由 $\beta_{mn}$ 可得到该波导内的 $\lambda_{mn} = \frac{2\pi}{\beta_{mn}}$，相速 $u_{pmn} = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{\beta_{mn}}$.

对于相速，有 $u_{pmn}u_{gmn} = (u_p)^2$ 存在.

(3) xoy平面都是驻波，只有z方向才能有传播的波或功率流.

(4) 对于确定传播的题型，写出表达式后，注意经历所有可能的情况.
求给定某参量范围时也应当考虑可以通过的模式. 上下限都要确定.
有的 $\omega$ 大于 $\omega_{cmn}$ (通过)，有的 $\omega$ 小于 $\omega_{cmn}$ (不通过).

(5) 单模，主模，最低次模是同一个东西.

# 电磁场与电磁波.

## 1. ODE特征方程求解 (2-order).

<u>Question.</u> Solution of $y''+ay'+by=0$. (1).

<u>Solution</u> Assume $y=e^{\lambda x}$, and.

$$e^{\lambda x}(\lambda^2+a\lambda+b)=0 \Rightarrow \lambda^2+a\lambda+b=0.$$

And $\lambda = \dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$.

① If $\lambda_1\neq\lambda_2$, and $\lambda_1,\lambda_2$ is real.

$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$ all satisify equation(1), And they all linearly independent, So that $y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$

② If $\lambda_1=\lambda_2=-\frac{a}{2}$.

Just have $e^{\lambda_1 x}=e^{\lambda_2 x}$, Assume $y_1=e^{\lambda_1 x}$, $\frac{y_2}{y_1}=h(x)$, $y_2=h(x)y_1$.

Take $y_2''$, $y_2'$, $y_2$ into equation(1), can obtain $h(x)=x$.

So that $y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2xe^{\lambda_1 x}=(C_1+C_2x)e^{\lambda_1 x}$.

③ If $\lambda_1\neq\lambda_2$, and $\lambda_1,\lambda_2$ is complex number.

Assume $\alpha_1=\alpha+\beta i$, $\alpha_2=\alpha-\beta i$

$$y_1=e^{(\alpha+\beta i)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)$$

$$y_2=e^{(\alpha-\beta i)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x).$$

Let $y_1'=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=e^{\alpha x}\cos\beta x$,

$y_2'=\frac{1}{2}(y_1-y_2)=e^{\alpha x}\sin\beta x$.

And $y=C_1y_1+C_2y_2=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$. □.

## 2. 分离变量法解 Laplace 方程.

空说不够具体,还是以一个具体的例子(二维).

<u>Question</u> $\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. in $\begin{cases} 0\le x\le a \\ 0\le y\le b \end{cases}$.

s.t. $\begin{cases} u|_{x=0}=0, \quad u|_{x=a}=f(y). \\ u|_{y=0}=0, \quad u|_{y=b}=0. \end{cases}$

Solution. Let $u(x,y) = X(x)Y(y)$, so that $\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y}$

Let $\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda$ $\Rightarrow \begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ Y'' + \lambda Y = 0. \end{cases}$

观察边界条件. $\begin{cases} u|_{x=0} = X(0)Y(y) = 0 \xRightarrow{\text{Non-trivial}} X(0)=0, \quad u|_{x=a} = X(a)Y(y) = f(y) \\ u|_{y=0} = X(x)Y(0) = 0 \Rightarrow Y(0)=0, \quad u|_{y=b}=0 \Rightarrow Y(b)=0 \end{cases}$

考虑齐次方程的 $Y$ 入手，进行特征方程的本征值讨论：

① 假设 $\lambda = 0$, $Y''=0 \Rightarrow Y = C_1 y + C_2$, 由边界条件, $Y(y)$ 必为平凡解.

② 假设 $\lambda<0$, 令 $\lambda = -\beta^2, \beta>0$, 有 $Y'' - \beta^2 Y = 0$, 写特征方程:

$$e^{\alpha y}(\alpha^2 - \beta^2) = 0, \quad \alpha = \pm\beta, \quad Y(y) = C_1 e^{\beta y} + C_2 e^{-\beta y}$$

有 $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{\beta b} + C_2 e^{-\beta b} = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$, $Y(y)$ 也平凡

③ 假设 $\lambda>0$, 令 $\lambda = \beta^2, \beta>0$, 有 $Y'' + \beta^2 Y = 0$.

$$e^{\lambda y}(\lambda^2 + \beta^2) = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i\beta, \quad Y(y) = C_1 \cos\beta y + C_2 \sin\beta y$$

由边界条件得 $\begin{cases} Y(0) = C_1 = 0 \\ Y(b) = C_2 \sin\beta b = 0 \Rightarrow \beta = \frac{n\pi}{b}, \underbrace{n=1,2,3\ldots}_{\text{n的负数使}\beta\text{为负}} \end{cases}$

则本征函数 $Y_n(y) = C_n \sin\frac{n\pi}{b}y$, $n=1,2,\ldots$ 本征值 $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{b^2}$, $n=1,2,\ldots$

现在考虑 $X$, 有 $X'' - \lambda X = X'' - \frac{n^2\pi^2}{b^2}X = 0$.

$$e^{\lambda x}\left(\lambda^2 - \frac{n^2\pi^2}{b^2}\right) = 0, \Rightarrow \lambda = \pm\frac{n\pi}{b}, \quad n=1,2\ldots$$

$$X(x) = C_1 e^{\frac{n\pi}{b}x} + C_2 e^{-\frac{n\pi}{b}x}$$

边界条件 $\begin{cases} X(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0, \ C_2 = -C_1 \\ X(a)Y(y) \text{ 须组合后考虑} \end{cases}$

则 $X_n(x) = C_1 e^{\frac{n\pi}{b}x} - C_1 e^{-\frac{n\pi}{b}x} = C_1\left(e^{\frac{n\pi}{b}x} - e^{-\frac{n\pi}{b}x}\right)$
$= 2C_1 \frac{e^{\frac{n\pi}{b}x} - e^{-\frac{n\pi}{b}x}}{2} = C_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right)$

有 $u_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right)$, $n=1,2\ldots$

最后只需确定 $B_n$, 由叠加原理, $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y)$, 再由边界条件.

$$u(a,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}a\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

求 $u(a,y)$ 以 $\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$, $n=1,2,\ldots$ 为基底上的 FS 展开

No.

Date

则 $B_n' = \frac{2}{T}\int_T V(a,y)\sin(\frac{n\pi}{b}y)\,dy$. ($B_n' = B_n\sinh(\frac{n\pi a}{b})$).

默认的，以 $\sin(\cdot)$ 为基底展开，$V(a,y)$ 奇延拓，以 $\cos(\cdot)$ 为基底展开，偶延拓，对 $V(a,y)$ 奇延拓，周期为 $2b$，从三角系定义是 even的.

$$B_n = \frac{2}{2b}\int_0^{2b} V(a,y)\sin(\frac{n\pi}{b}y)\,dy$$

考虑到 $V(a,y)\sin(\frac{n\pi}{b}y)$ 是偶的，有.

$$B_n' = \frac{2}{2b}\cdot 2\int_0^b V(a,y)\sin(\frac{n\pi}{b}y)\,dy = \frac{2}{b}\int_0^b V(a,y)\sin(\frac{n\pi}{b}y)\,dy.$$

上面的分析一直对 $B_n'$，则 $B_n$ 为.

$$B_n = B_n'/\sinh(\frac{n\pi a}{b}) = \sinh^{-1}(\frac{n\pi a}{b})\frac{2}{b}\int_0^b V(a,y)\sin(\frac{n\pi}{b}y)\,dy.$$

则我们也求得了 $B_n$，即我们求解了1这个问题. □.

<补充，FS展开>.

这里使用的是FS的另一种形式，不是复数形式.

<u>Theorem</u> (FS). A function $f(x)$ with Period $T$, then it must can be write as $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x))$.

Where $\begin{cases} a_n = \frac{2}{T}\int_T f(x)\cos(n\omega x)\,dx, & n=0,1,2\ldots \\ b_n = \frac{2}{T}\int_T f(x)\sin(n\omega x)\,dx, & n=1,2\ldots \end{cases}$

<u>Remark</u> 1. 在电磁场问题中，遇到的 $f(x)$ 都是有界的，这时我们需要延拓才可以得到周期函数.

2. 该定理不只可以以 $\cos(n\omega x)$, $\sin(n\omega x)$ 为基，更加复杂的三角函数基也可以，例如若在边值问题中遇到.

$$\sum B_n\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}x = f(x),\ ~~0<x<1~~\ 0<x<1.$$

可以将 $f(x)$ 奇延拓再直接 $\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}x$ 为基展开.

$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}x\,dx.$$

$$= \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}x\,dx.$$

$$= 2\int_0^1 f(x)\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}x\,dx \text{ (被积函数为偶)}.$$

$\int_0^1$ 的上下限不必考虑，也可是 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$，所以只要被积函数为偶可化简对应

<补充，三维 Laplace>.

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{X''}{X} = C_1 \\ \frac{Y''}{Y} = C_2 \\ \frac{Z''}{Z} = C_3 \end{cases} \text{ and } C_1 + C_2 + C_3 = 0.$$ 然后逐个分析.

KOKUYO

<补充，非齐次拆分>.

$$\nabla^2 u = 0 \qquad (0<x<a,\ 0<y<b).$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} u(0,y) = u(a,y) = u_0 \\ u(x,0) = u_0, \quad u(x,b) = V_0 \end{cases}$$

对 $u$ 进行 $u=V+W$ 的拆分考虑.

$$\nabla^2 V = 0 \qquad\qquad \nabla^2 W = 0$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} V(0,y)=V(a,y)=0 \\ V(x,0)=u_0, \quad V(x,b)=V_0 \end{cases} \qquad \text{s.t.} \begin{cases} W(0,y)=W(a,y)=u_0 \\ W(x,0)=u_0 \quad W(x,b)=V_0 \end{cases}$$

分别求解之后，再使用 $u=V+W$ 组合得到 $u$.

即将非齐次边界条件 Laplace 转为齐次边界条件 ~~Laplace~~ Laplace 求解.