

DSP 数字信号处理

1. 对信号的一种理解方式 (LTI).

信号是一种函数, 信号进系统便是一种函数运算.

$$y[n] = T\{x[n]\}$$

将 $x[n]$ 以 $\delta[n]$ 为 $\Rightarrow T\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right\}$.

基函数开 $\Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] T\{\delta[n-k]\}$.

时变 $\Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] = x[n] * h[n]$

可以表示为 LTI 卷积关系.

2. 系统性质的判断 (性质是系统客观存在的特点, 与信号无关),

系统性质必然要从信号入手, 什么信号的判断标准?

$h[n] = T\{\delta[n-k]\}$ $\rightarrow$ 意味对 $\delta[n]$ 基底的坐标变换或令其为冲激响应.

可见, 系统是对其基的作用而并非是对一组信号的作用, 系统的性质可完全由其冲激响应得到.

从 $h[n]$ 入手判断因果性和稳定性 (BIBO).

$h[n] = 0, n < 0 \Rightarrow$ 因果.

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \Rightarrow$ 稳定.

3. 特征向量和复数的引入.

回顾卷积.

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k].$$

计算卷积是一个复杂的过程, 但我们有它的特征向量, $e^{j\omega n}$ ($x[n] = e^{j\omega n}$ 假设).

$$y[n] = e^{j\omega n} * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j\omega n} \cdot e^{-j\omega k} = e^{j\omega n} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k} \right)$$

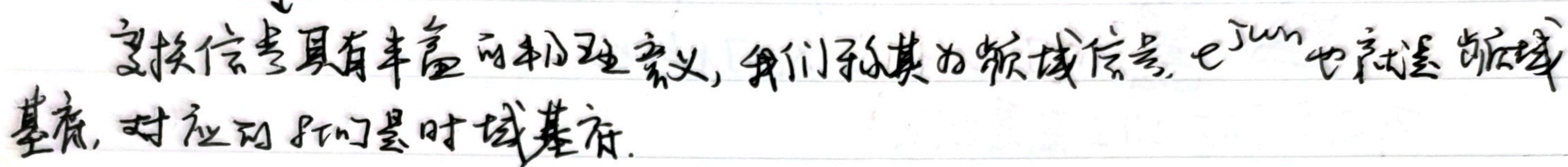
$$= H(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega n}$$

这个地方的 $e^{j\omega n}$ 但基仍在 $\delta[n]$ 基上, 所以求出的 $y[n]$ 在 $\delta[n]$ 基上.

特征 (特征) 向量是系统的属性, 它进入系统仅仅相当于乘上一个常数.

那么, 通过 $\delta[n] \rightarrow e^{j\omega n}$ 的基变换, 便可以使信号进入系统就是乘一个常数, 而且这个常数与信号的事权重 (基权重) 无关, 仅仅与基和 $h[n]$ 有关, 如此, 卷积简化, 那么只需要基变换关系.

这就是引入变换的原因, 使卷积计算更加简单, 如下图所示.



a) 序列值对 $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{Z}$ $\rightarrow$ 影响有限且连续
可以相互计算

例如理想低通滤波器, 不能相互推出只能由一个到另一个
反向推导收敛, 无法计算。

$$1 \xrightarrow{\text{DTFT}} \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega + 2\pi r)$$

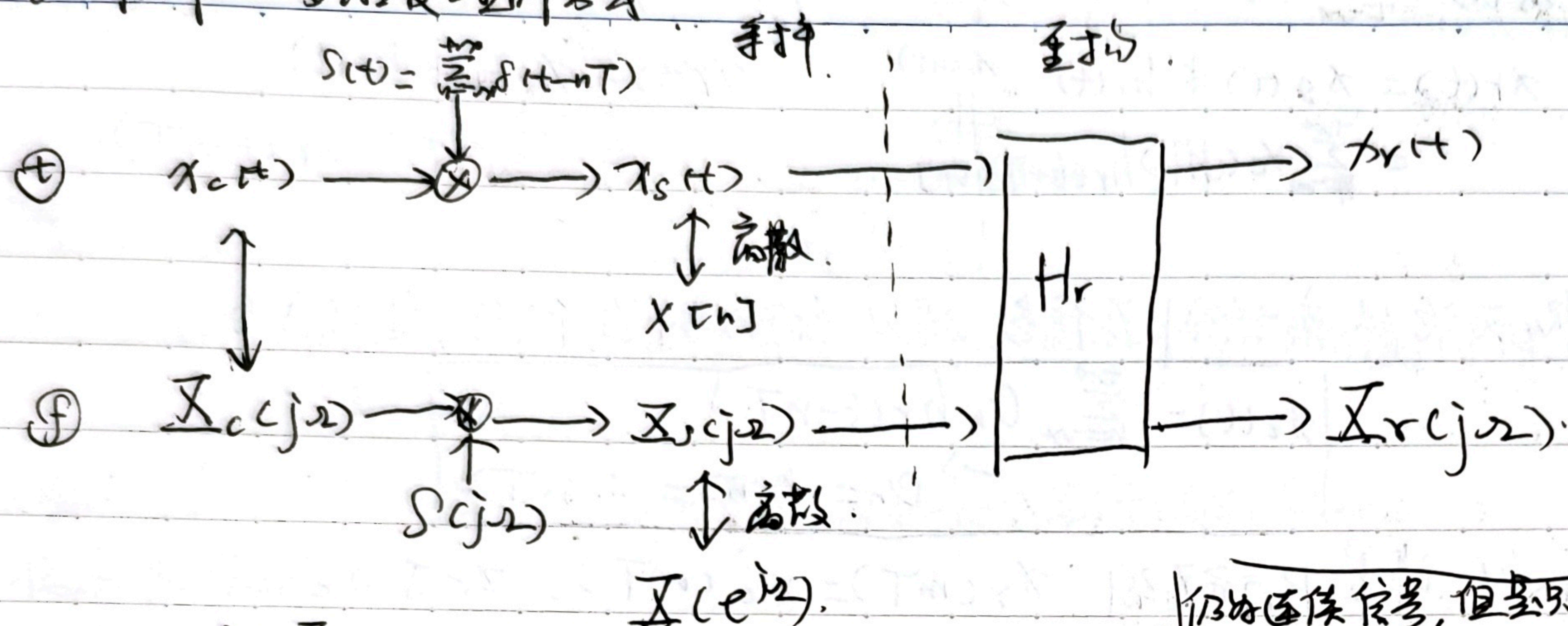
$$e^{j\omega n_0} \xrightarrow{\text{DTFT}} \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r)$$

几乎有至深刻的

$e^{j\omega n} \xrightarrow{\text{DFT}} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r)$ 称为基函数, 可通过其求 $\cos, \sin$ 等系数的变换

5. 周期信号的变换

6. 采样与重建系统



A. <从时域上看>

$$x_s(t) = x_c(t) * s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) \delta(t-nT)$$

B. <从频域上看>

$$S(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s), \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

$$X_s(j\omega) = X_c(j\omega) * S(j\omega)$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\omega - k\omega_s))$$

仍为连续信号，但只在 $\omega = 2\pi n/T$ 上有 $x_c(t)$ 一样的值(采样)。

离散信号
采样 $\leftrightarrow$ 周期延拓
Spectrum shifting

加权 $(1/T)$ ，对 $X_c(j\omega)$ 在 ω 域上进行周期性延拓。

C. <从离散到离散>

$$\text{假设取样的 } x[n], \quad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) e^{-j\omega n}$$

$$\text{回顾 } X_s(j\omega), \quad X_s(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) e^{-j\omega n T}$$

可见 $X(e^{j\omega})$ 与 $X_s(j\omega)$ 唯一不同为 $e^{-j\omega n}$ 和 $e^{-j\omega n T}$ ；对 $X_s(j\omega)$ 进行 $\omega = \frac{\omega}{T}$ 的尺度变换便可以得到 $X(e^{j\omega})$ ，从而得到 $x[n]$ 。

$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$, $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$, $T = 2\pi$, $\omega_n = \omega$ 。可见，这种尺度变换，在频域上就是频域标准化，在时域上从 nT 到连续的 n ，也是时域标准化。

D. <采样与重构> ($x_s \rightarrow x_c$), ($x[n] \rightarrow x_s(t) \rightarrow x_c(t)$)

将 $x_s(t)$ 再通过一个低通滤波器，滤掉延拓的周期信号，便可得到有限带宽信号 $x_c(t)$ ， $x_r(t) = x_c(t)$ 。

这是采样与重建。

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) \delta(t-nT)$$

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \delta(t-nT)$$

$$x_r(t) = x_s(t) * h_r(t)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) h_r(t-nT)$$

$$x_r(t) = x_s(t) * h_r(t)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] h_r(t-nT)$$

可见, 无论从离散到连续信号, 还是从连续到离散信号, 其表达式为

$$\left\{ \begin{aligned} x_c(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n h_r(t-nT) \\ &\quad \downarrow \\ a_n &= x[n] = x_c(nT) \end{aligned} \right.$$

可以从课本 P117 页看到 $x_r(mT) = x_c(mT)$, 而 x 与 x_c 在取样点处值完全相等, 由上式框内表达式, 可见, 取样, 无非就是对 $x_c(t)$ 以 $h_r(t-nT)$ [其实是 sinc 函数] 在固定点, 进行展开, 综合上述全部推导, 我们可推出取样三个维度的理解.

- 一、一个域的周期延拓 $\leftrightarrow$ 一个域的取样.
- 二、假设已知 a_n ($x_c(t)$ 的离散点), 对 $x_c(t)$ 进行以 $h_r(t)$ 为基的插值.
- 三、已知 $x_c(t)$, 对 $x_c(t)$ 进行以 $h_r(t-nT)$ 为基的展开, 即 取样.

附 <拍拉术和> 采样就是周期延拓.

令 $G(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t+kT)$, 有 $G(t) = G(t+T)$, 则 $G(t)$ 是延拓的 $f(t)$.

对 $G(t)$ 进行 FS 展开, $G(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t}$, 那么有:

$$G(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t}$$

其中, $a_n = \frac{1}{T} \int_T G(t) e^{-j\frac{2\pi n}{T}t} dt$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t+kT) e^{-j\frac{2\pi n}{T}t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t+kT) e^{-j\frac{2\pi n}{T}t} dt$$

$$\xrightarrow{t'=t+kT} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{T}{2}+kT}^{\frac{T}{2}+kT} f(t') e^{-j\frac{2\pi n}{T}t'} dt'$$

将所有区间拼起来, 就是积分.

$$= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\frac{2\pi n}{T}t} dt$$

Fourier Transformation

$$= \frac{1}{T} F(j\frac{2\pi n}{T})$$

那么就有 $G(t) = \sum_n \alpha_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t} = \sum_n \frac{1}{T} F(j\frac{2\pi n}{T}) e^{j\frac{2\pi n}{T}t}$

$\downarrow$ FT

$$G(j\omega) = \sum_n \frac{1}{T} F(j\frac{2\pi n}{T}) \delta(\omega - \frac{2\pi n}{T})$$

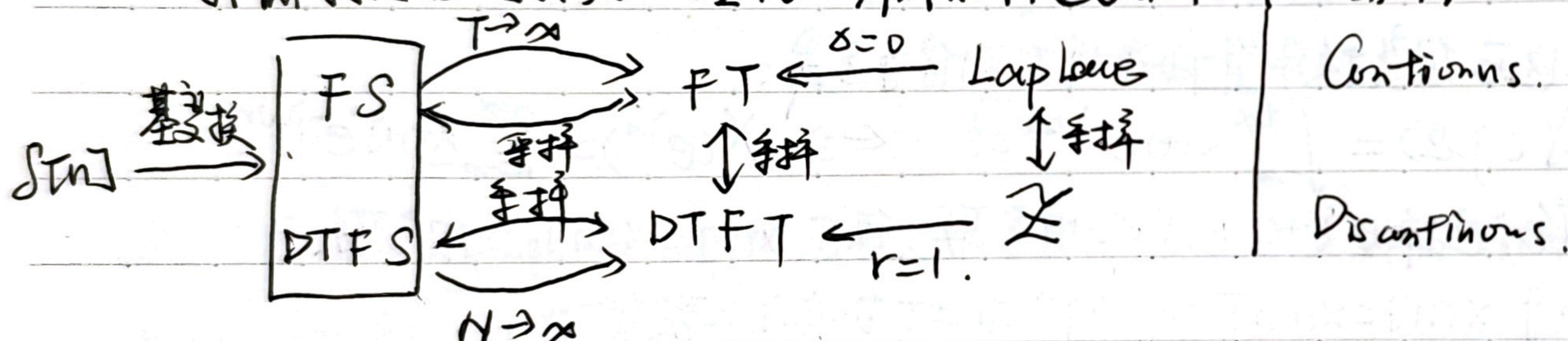
可见, $G(t)$ 是经过周期延拓的 $f(t)$.

$G(j\omega)$ 是冲激乘以 $F(j\frac{2\pi n}{T})$, 并且只在 $\omega = \frac{2\pi n}{T}$ 上有值, 即对 $F(j\omega)$ 的采样.

由 FT 的对偶性, 一个域的周期延拓 $\longleftrightarrow$ 另一个域的采样.

7. 三种常见变换的联系.

我愿称之为 <大统一理论>, 在傅里叶变换各种特殊情形下引入.



(其实所有变换的本质都是基变换, 无非就是换了一组特征基)
这里上图中“基变换”指 FS 和 DTFS 的推导过程 [其他用级数变换推导]

为了六大变换更加贯通, FS, DTFS 将从正余弦基变换推导而出,

a) FS, DTFS $\longleftrightarrow$ FT, DTFT.

i) 变换 (指正余弦的变换) 对非周期信号进行基变换, 也就是 $T \rightarrow \infty$ 的周期信号的变换, 从正余弦展开 (sin, cos 为基) (即 FS, DTFS) 直接推导 FT, DTFT.

ii) 但是这种方式的解释物理性质看不出来, 针对一种特殊的情况, 我们可以看出其内在联系.

(以 FT 为例), 选取变换的信号为周期信号 $x(t) = x(t+T)$.

回想起《信号与系统》书, 周期信号 FT, $X(j\omega) = \sum_k X[k] \delta(\omega - k\omega_0)$.

似乎会凑出来使得 FT 与变换自治的, 实则不然, 我们通过观察, 甚至可以借助系统来表现关系.

观察基底: $FS \langle e^{jk\Omega_0 t} \rangle \longleftrightarrow FT \langle e^{j\omega t} \rangle$

$\langle k\Omega_0, \Omega \rangle$, 这能让我们联想到什么, 采样!!!

如果 $e^{j\omega t}$ 和 $e^{jk\Omega_0 t}$ 都展开同一组信号, $e^{jk\Omega_0 t}$ 显然是 $e^{j\omega t}$ 的一组采样! 一个域的采样是另一个域的周期延拓, 观察.

$$X(j\Omega) = 2\pi \sum_k X[k\Omega_0] \delta(\Omega - k\Omega_0).$$

这就是频域上的周期延拓, 这又说明了这基一种采样变换, 但是, 它里面的采样又不同于通常的采样, 我暂时没有推导出其中的数学关系, FS 后面应该有一个隐藏的函数, 使 $X[k\Omega_0]$ 是它的采样.

DTFT 和 DTFS 关系网.

b) $FT \longleftrightarrow DTFT$,

我在这两个变换中直接采样或推导方式.

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}.$$

结论: 这些变换, 以采样相关联, 使得 $x[n] = x(nT_s)$ 相关联.

由于 $x[n] = x(nT_s)$, 它们的 FT 也存在关联.

$$\begin{aligned} \text{证: } X(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \quad \text{这里的 } x(t) \text{ 为 } x_s(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_n x_c(nT_s) \delta(t - nT_s) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \sum_n x_c(nT_s) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\Omega t} \delta(t - nT_s) dt \\ &\xrightarrow{x[n] = x_c(nT_s)} \sum_n x[n] e^{-j\Omega n T_s} \xrightarrow{\omega = \Omega T_s} \sum_n x[n] e^{-j\omega n} = X(e^{j\omega}). \end{aligned}$$

$$\text{证: } x_s(t) = \sum_n x_c(nT_s) \delta(t - nT_s) = x_c(nT_s) = x[n].$$

$$x_c(nT_s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega n T_s} d\Omega.$$

$X(e^{j\omega}) \rightarrow X(j\Omega)$ 有底信号的采样过程.

$$X(j\Omega) = X(e^{j\omega}) H(j\Omega) T, \quad H(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| \leq \pi/T_s \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{代入: } x_c(nT_s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(e^{j\omega}) H(j\Omega) T e^{j\Omega n T_s} d\Omega.$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T_s}^{\pi/T_s} T X(e^{j\omega}) e^{j\Omega n T_s} d\Omega.$$

$$\xrightarrow{\omega = \Omega T_s} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega.$$

这样, 通过采样过程, 我们将 FT 与 DTFT 关联起来.

c) $\mathcal{Z} \leftrightarrow \text{Laplace}$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$$\Rightarrow X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

↓ 对 FT $\leftrightarrow$ DTFT 推广 - 致, 考虑 $X_c(nT_s)$ 的 Laplace 变换.

$$X_c(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_c(nT_s) e^{-snT_s} e^{-j\omega nT_s} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_n x_c(nT_s) \delta(t - nT_s) e^{-snT_s} e^{-j\omega nT_s} dt$$

$$= \sum_n x_c(nT_s) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-snT_s} e^{-j\omega nT_s} \delta(t - nT_s) dt$$

$$= \sum_n x_c(nT_s) e^{-snT_s} e^{-j\omega nT_s}$$

$$= \sum_n x_c(nT_s) e^{-(s + j\omega)nT_s}$$

$$= \sum_n x[n] e^{-snT_s} \leftrightarrow \sum_n x[n] z^{-n}$$

$$e^{-snT_s} = z^{-n} \Rightarrow z = e^{-sT_s}$$

通过采样定理, 我们又将 Laplace 变换与 $\mathcal{Z}$ 变换联系起来, FT, DTFT 是 Laplace 和 $\mathcal{Z}$ 变换在基的幅度为 1 时的特殊情况.

上述分析, 我们尽量少的运用 $\mathcal{Z}$ 变换, 仅从采样定理, 对这三种基变换, 进行了物理意义上的联系.

8. 从 DFS 到 DFT.

为了这里推导和公式的统一性 (想以前人定义时也如此), 虽然 DFS 与 DTFS 不是一个东西, 但是 DFS 的分析与综合公式如下:

$$\tilde{X}[K] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{j\frac{2\pi}{N}Kn}$$

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{K=0}^{N-1} \tilde{X}[K] e^{-j\frac{2\pi}{N}Kn}$$

当 $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$, 使得 $\tilde{X}[K]$ DFS 变换公式的正变换系数为 1, 理解公式可以方便, DFS 是专注于频域的交流, 所以换种表示使频域方便理解.

A. DFS 与 DTFT 的关系.

考虑将 DFS 强制纳入 DTFT 的框架使得

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \tilde{X}[K] \delta(\omega - \frac{2\pi K}{N})$$

这样再变换回来有 $\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$, 恰如 Inverse-DFT.

回顾前面的知识, 根据一个小例子来揭示更细致的关系.

$\tilde{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-mN]$, ~~$\tilde{x}[n]$~~ $x[n]$ 为有限长序列.

$$\tilde{x}[n] = x[n] * \tilde{p}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-mN]$$

课本 8.3, 8.4 两个

例子都有意义(互, 自)

$$\text{DFT} \rightarrow \begin{cases} \tilde{X}[k] = X[k] \tilde{P}[k] \\ \tilde{X}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) P(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k) \end{cases}$$

那么 $\tilde{X}[k] = X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$.

由此 $\tilde{x}[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$, 即

频域($\frac{2\pi}{N}k$)采样 $\xleftrightarrow{\text{DFT}}$ 时间(n)周期延拓

B. DFT $\rightarrow$ DFT & DTFT

推测构造 DFT 需要实际, 存储器不可能存储无限长序列, 所以将 DFT 中有效的序列拿出, 令 DFT 仅仅是 $[0, N-1]$ 区间内的 DFT, 不管是 f -域还是 t -域, $[0, N-1]$ 之外皆为 0.

课本上的话说得好(加以个人观点).

$\left\{ \begin{array}{l} \text{DFT 实际上用周期序列表示有限长序列.} \\ \text{DFT 实际上用周期 } f\text{-域信号表示有限长 } f\text{-域信号.} \end{array} \right.$

$\rightarrow$ DFT 实际上就是强制取区间, 只是为了存储, DFT 无周期, 却

又无时无刻不暗含 周期性

哈哈, 同上世纪的一些救世主运动一般, 来消除根本矛盾.

这样来看 DTFT 的关系更清楚了, 如果说(其实就是在说).

DFT 是 DTFT 以 $\frac{2\pi}{N}$ 的采样 (f -域).

直接采样

DFT 是 DFT 的周期延拓, 是 DTFT 的采样而延拓.

(延拓) DTFT

本身以周期

而任何意义的说法, 只是为了更 Logic 的讲一句话.

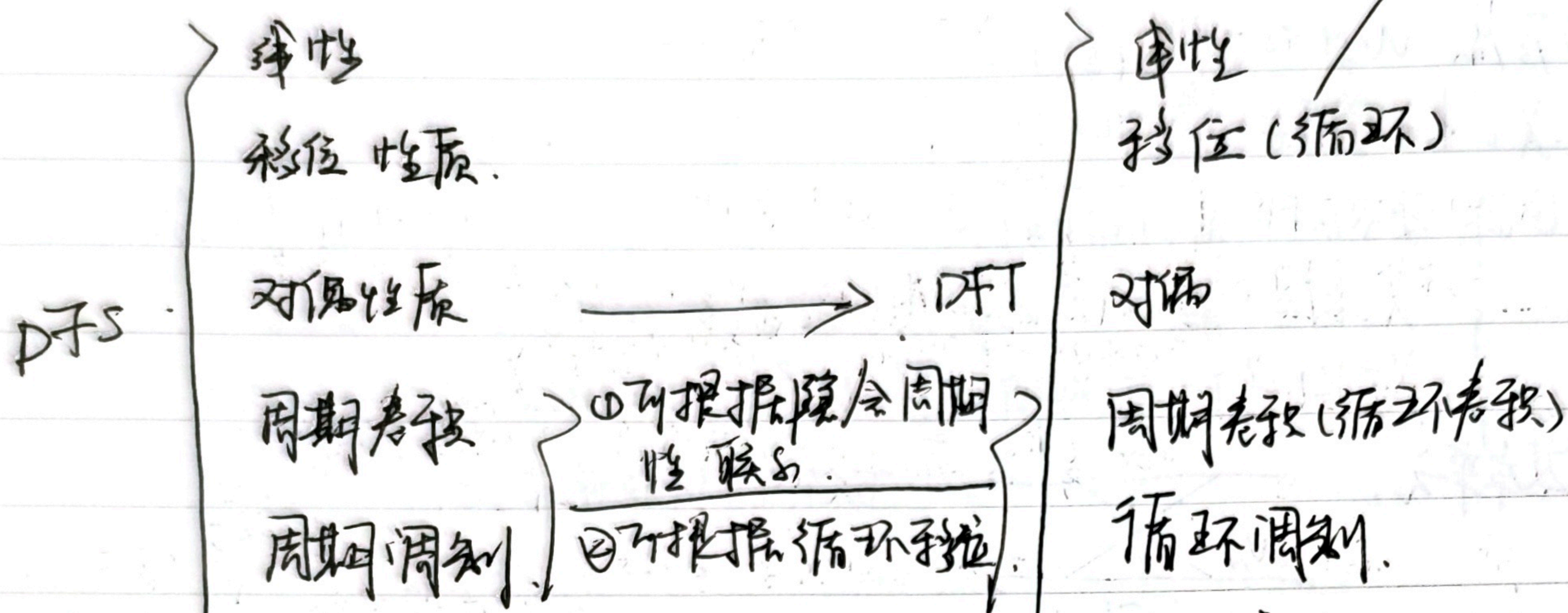
C. DFT 与 DFT 的性质.

从 B Section 看出, DFT 是什么, 就是 DFT 的强制取区间, 所以

我认为, DFT 的性质推导并非自治型, 它的所有推导, 都必须从 DFT.

来推导, 然后再取固定区间, 所以, DFT的性质完全需求由DFS导出.

$$\text{注意 } (1-1)_3 = (-3+4)_3 = 2.$$



详细性质不翻书, 日有月无, 我也整理下这些弟子(变换)的性质共同点, 之所以说弟子, 是站在更宏观角度.

9. 将计算复杂度降低的DFT $\rightarrow$ FFT Compute.

Divide and Conquer 算法级优化.

A. 按时间抽取的FFT.

书中给出了一种使用递归系统推导FFT的method, 本人并不喜欢这种推导方式, 认为这种数学推导方式不够统一和简洁, 所以不从System推导, 而是直接关注于Single的推导, 致力于在Math中发现 Divide and Conquer 原理.

直接从最开始的计算公式入手.

Divide

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$$

$$= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n] W_N^{k2n} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1] W_N^{k(2n+1)}$$

奇偶项之和

$$= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n] W_N^{kn} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1] W_N^{kn}$$

合并

$$= \sum_{n=0}^{N/2-1} (x[2n] + W_N^k x[2n+1]) W_N^{kn}$$

(T-1)

但是, 这样并没有将计算复杂度降到最低, W_N 的性质还未利用起来!

用(T-1)式, 还必须动脑子考虑降低周期性的(在周期内发现这个对称性).

代表两个频点 (全频点),

$$\text{FFT-1) 型为 } X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} + W_N^k \sum_{n=0}^{N-1} x[n+N] W_N^{kn}$$

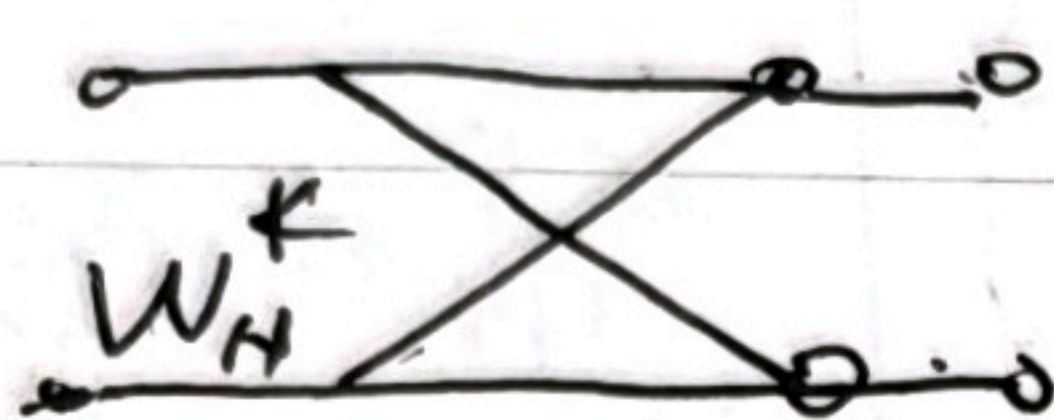
$X[k]$ 有 N 个 point, 而两个变换只有 $N/2$ 个 point, 在 $(N/2, N)$ 中的 point 计算时, 还考虑 W_N 的周期性, 但.

$$X[k + N/2] = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n] W_{N/2}^{kn} - W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1] W_{N/2}^{kn}$$

这样, 便不必利用周期性 (其实先一步用了), 直接画出蝶耳! (蝶形图),

$$\left. \begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n] W_{N/2}^{kn} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1] W_{N/2}^{kn} \\ X[k + N/2] &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n] W_{N/2}^{kn} - W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1] W_{N/2}^{kn} \end{aligned} \right\}$$

基本单元,



, 后续有详细讨论.

B. 按频率抽取的 FFT.

按 Boolean 代数的角度说, 时间抽取是子逻辑, 频率抽取是反逻辑.

i) 偶数频点,

① 直接了当 Math 推导

$$\begin{aligned} X[2k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{2kn} \\ \text{《(零频点)》的拆分} &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n] W_{N/2}^{kn} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1] W_{N/2}^{kn} \\ \text{换元} &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] W_{N/2}^{kn} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n+N/2] W_{N/2}^{kn} \\ \text{合并} &= \sum_{n=0}^{N/2-1} (x[n] + x[n+N/2]) W_{N/2}^{kn} \end{aligned}$$

② 采样角度.

前一小节 (8.) 简单分析了 FFT 与 DFT 的采样关系, DFT 以 W_N^{kn} 为基函数, 为 N 点频率采样, 时域 N 周期延拓, 若 $X[2k]$, 基函数 $W_N^{2kn} \rightarrow W_{N/2}^{kn}$, 则频率 $N/2$ 点采样, 时域 $N/2$ 周期延拓, 因为 $N/2$ 点考虑 $W_{N/2}^{kn}$ 所以关注 $0, N/2-1$ 序列, $x[n]$ 为 N 周期序列, 可手画圈, $x[n]$ 为 $N/2$ 周期延拓, 有 $x[n]_{N/2} = x[n] + x[n+N/2]$, $n \in [0, N/2-1]$.

找到了对应后 $X[2k] \xrightarrow{\text{DFT}} x[n]_{N/2} = x[n] + x[n+N/2]$.

$$\text{于是 } X[2k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} (x[n] + x[n+N/2]) W_{N/2}^{kn} = \underbrace{\text{DFT}_{N/2}}_{\text{DFT 子}} \{x[n] + x[n+N/2]\}$$

ii) 奇数频点

① Math 方法

$$X[2k+1] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{(2k+1)n}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] W_N^n) W_N^{2kn} = \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] W_N^n) W_{\frac{N}{2}}^{kn}$$

$$\text{Divid} = \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] W_N^n) W_{\frac{N}{2}}^{kn} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} (x[n] W_N^n) W_{\frac{N}{2}}^{kn}$$

$$\text{换元} = \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] W_N^n) W_{\frac{N}{2}}^{kn} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} (x[n] W_N^n) W_{\frac{N}{2}}^{kn}$$

$$\text{Compuer} = \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] W_N^n - x[n+\frac{N}{2}] W_N^n) W_{\frac{N}{2}}^{kn}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} [(x[n] - x[n+\frac{N}{2}]) W_N^n] W_{\frac{N}{2}}^{kn}$$

$$= \text{DFT}_{\frac{N}{2}} \{ (x[n] - x[n+\frac{N}{2}]) W_N^n \}$$

② 移位性质

$$X[2k] = \text{DFT}_{\frac{N}{2}} \{ x[n] + x[n+\frac{N}{2}] \}$$

$$X[k] = \sum_n x[n] W_N^{kn} W_N^n = \sum_n (x[n] W_N^n) W_N^{kn}$$

$$X[2k+1] \xrightarrow{\text{PFT}} \underbrace{x[n] W_N^n}_{X[n]_{\frac{N}{2}}} W_{\frac{N}{2}}^{kn}$$

$$X[n]_{\frac{N}{2}} = x[n] + x[n+\frac{N}{2}]$$

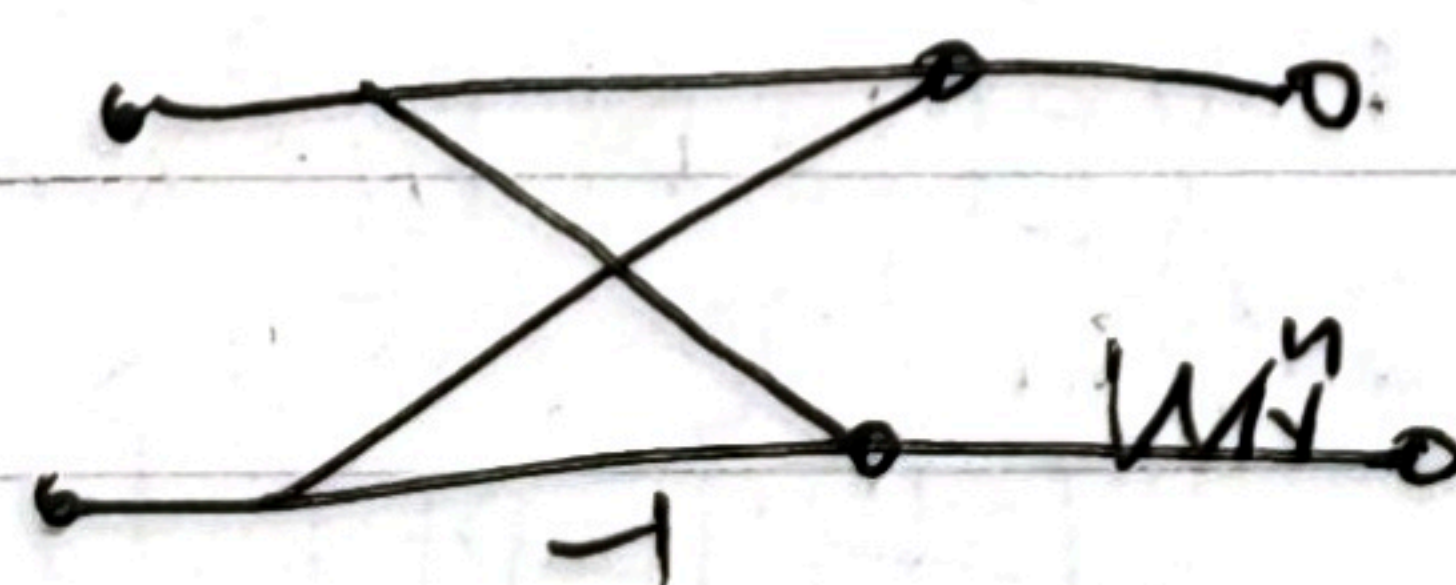
$$X[2k+1] = \text{DFT}_{\frac{N}{2}} \{ x[n] W_N^{kn} + x[n+\frac{N}{2}] W_N^{n+\frac{N}{2}} \}$$

$$= \text{DFT}_{\frac{N}{2}} \{ (x[n] - x[n+\frac{N}{2}]) W_N^n \}$$

如此, 我们分别从奇偶频点, 每种频点两种推导式的方法推导了时域抽取的FFT算法, 总结起来:

$$\left\{ \begin{aligned} X[2k] &= \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] + x[n+\frac{N}{2}]) W_{\frac{N}{2}}^{kn} = \text{DFT}_{\frac{N}{2}} \{ x[n] + x[n+\frac{N}{2}] \} \\ X[2k+1] &= \sum_{n=0}^{N-1} [(x[n] - x[n+\frac{N}{2}]) W_N^n] W_{\frac{N}{2}}^{kn} = \text{DFT}_{\frac{N}{2}} \{ (x[n] - x[n+\frac{N}{2}]) W_N^n \} \end{aligned} \right.$$

基单元



C. 从图例以及单元角度分析两种经典的FFT.

从最小单元 ($N=2$) 入手, 考察两种FFT代表什么意思.

T抽取 $X[k] = X[0] + W_N^k X[1] \Rightarrow \begin{cases} X[0] = X[0] + X[1] \\ X[1] = X[0] - X[1] \end{cases}$

即 $X[0]$ 与 $X[1]$ 交叉, $W_N^0 X[1]$, 所以, 最小单元直接完成了 DFT 变换.

f抽取 $X[k] = X[0] = X[0] + X[1], = \text{DFT}_2 \{x[n] + x[n+1]\}$
 $X[2k+1] = X[1] = X[0] - X[1] = \text{DFT}_2 \{x[n] - x[n+1]\} W_2^0$ } (f-1).

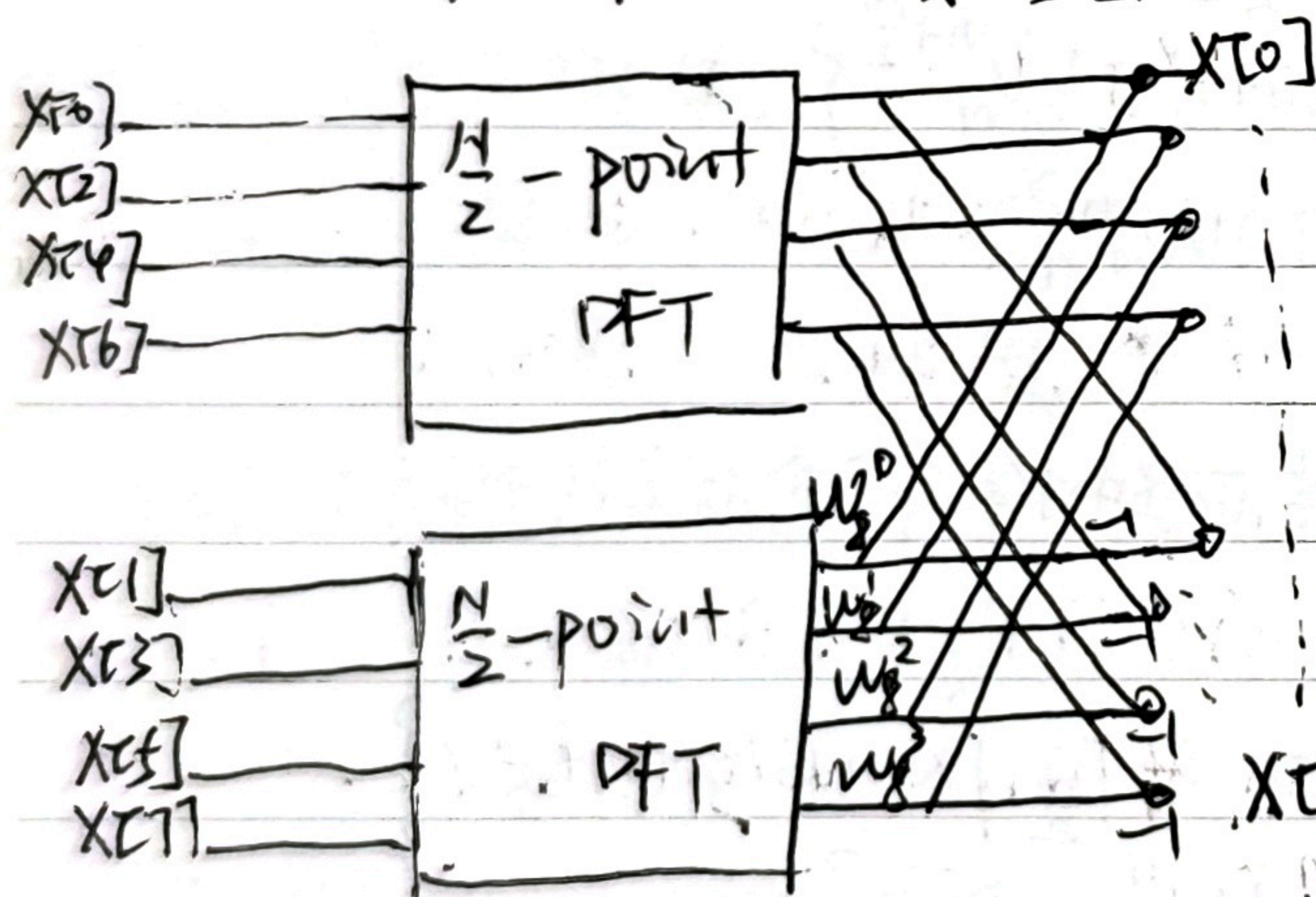
直观看差不多, 但是, 如果用另一种表示, 好像, 有一个奇怪的东西出现.

DFT $\{x[n]\} = X[k]$,

考察 Math 推导 $\text{DFT}_2 \{x[n]\} = \sum_{n=0}^1 x[n] W_N^{kn} \begin{cases} X[0] = X[0] + X[1] \\ X[1] = X[0] - X[1] \end{cases}$
 只有个改, 你愿意继续换其他?

出现 (f-1) 的原因, 仅仅是因为 DFT_2 是一个线性组合, 更准确的说, 不变算子, 只是因为 DFT₂ 是不变算子, $x[n]$ 不断的线性组合, 到达了 $X[k]$ 的变换.

下面列举两种典型, 蝶形图.

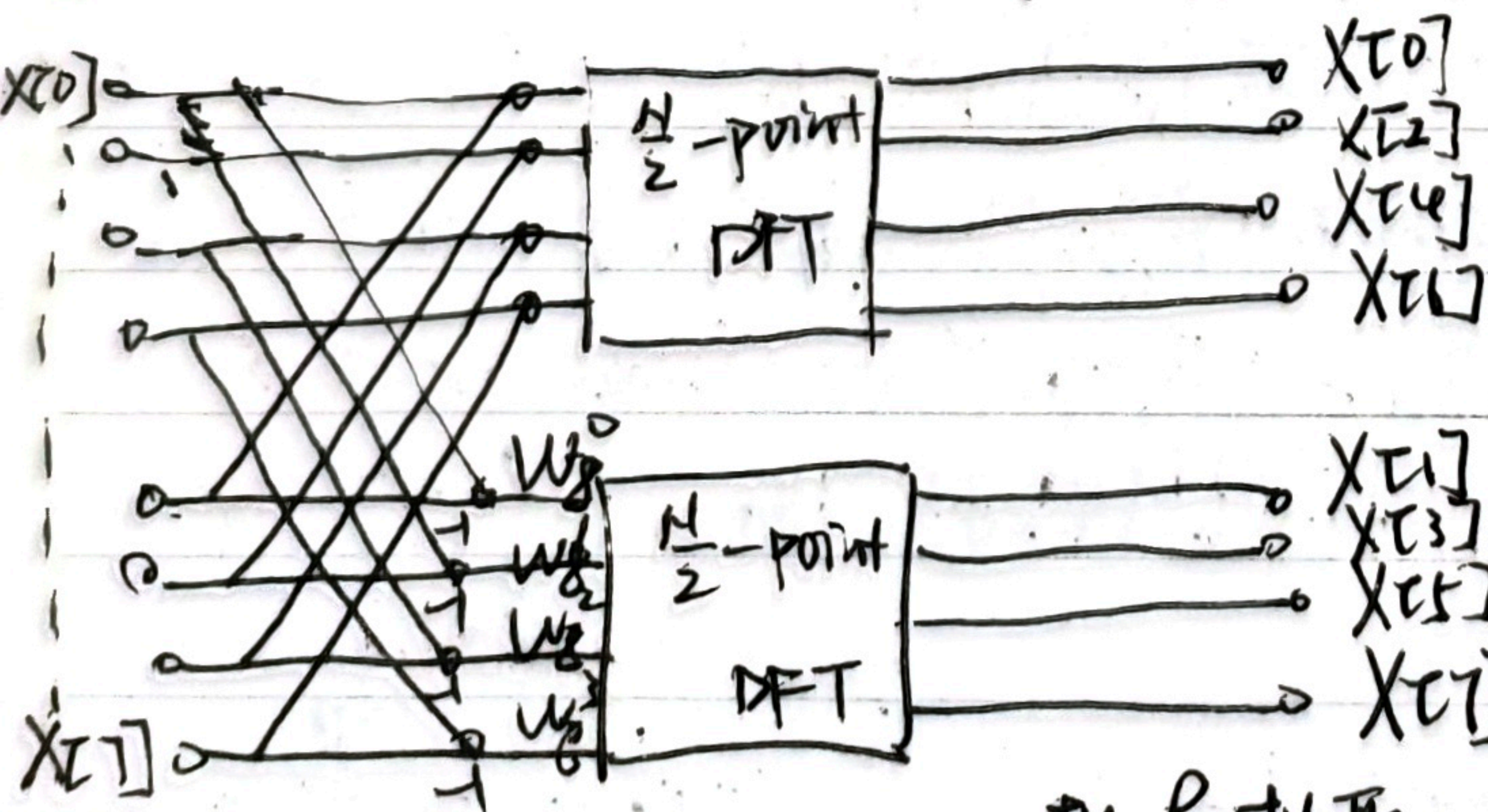


$$X[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n] W_N^{kn} - W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1] W_N^{kn} \\ = X_0[k] - W_N^k X_1[k]$$

只是取个差

可以发现, 按 time 抽取, 与结果是 DFT 的线性组合, 在最左端的 $N/2$ 单元已完成时域到 f 域的转变.

time 抽取



$$X[k] = \text{DFT}_2 \{x[n] + x[n + \frac{N}{2}]\}$$

$$X[2k+1] = \text{DFT}_2 \{(x[n] - x[n + \frac{N}{2}]) W_N^k\}$$

可以发现, 按 f 抽取, 是 Inverse-DFT 的线性组合, 是因变量的线性组合, 直到最右端的 $N/2$ 最小单元, 完成了时域到 f 域的转变.

f 抽取

DFT 的线性组合 $\longleftrightarrow$ 线性组合的 DFT.

10. 初识DFT谱分析.

DFT谱分析步骤:

 $x_c(t)$ 真实信号 $x_{\text{Bandlimit}}(t)$ 频域有限信号 $x[n]$ ① $x[n] \leftarrow w[n]$ 加窗 $x_{\text{time limit}}[n]$ 时域有限信号

↓ 验证

满足DFT条件.

② 补零

 $X[k]$

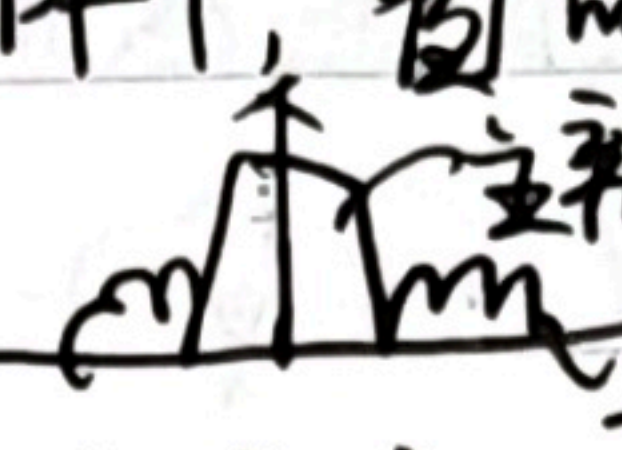
② 补零

对 $x[n]$ 进行补零 (其关键是 $x_{\text{time limit}}[n]$, 这里字着方便), 相当于时域延长周期, 进行周期延拓, (↑), 那么对应频域就是频域过采样 ($\omega = \frac{2\pi}{N} \downarrow$), 那么可以更直观的恢复其DTFT.

这是对分辨率的考虑, 类比为栅栏, 加窗, 相当于干涉, 已经决定了滤波器的情况 (DTFT), 而不论如何补零, 只相当于小孔的变量更改, 只影响栅栏内的情況, 最好的效果就是重现栅栏, 没有新的信息, 也不可能有的信息, 但合理时域补零 (频域过采样) 可以使得DTFT线性内推出精确的DTFT.

③ $k \rightarrow \omega \rightarrow \Omega$ } $\omega = \Omega T$, $\omega = \frac{2\pi}{N} k$ } $\Rightarrow$ 两种频率归一化 } $\Omega = \frac{2\pi}{NT} k = 2\pi \frac{f_s}{N} k$

① 加窗

加窗是为了获得时域有限信号, 以便后续进行DFT, 窗的种类有很多, 但都在频域有  的样子, 窗口长度越长, 主瓣宽度越窄, 即成反比关系, 那么DFT也就相当于以窗函数的DFT为基础进行插值, 这便会带来问题, 最简单易看的, $\cos(\omega n) \xrightarrow{\text{DFT}} \text{Dirac}$

加窗不当有 $\xrightarrow{\text{DFT}} \text{Sinc}$, 两个

频率发生混叠, 无法分辨, 总结

加窗的坏处 (对频域).

加窗 } 频率分辨率相互影响, 泄漏.
↓ 即
频率不能分辨率, 振幅也受影响.
1. 分辨率降低 2. 泄漏.

11. 所有的变换都是在做展开和内插。

受陈友义的《<数字信号处理原理及应用>启发。

在 DFT 章节中,作者以插值 $\leftrightarrow$ 展开的角度,阐述了 $X(\omega)$ $X(e^{j\omega})$ $X[k]$ 之间的内插关系,内插基函数是只在对应点有值,在点外为 0 的函数,确保了不变性以及函数的复原,内插基函数的推导有以下步骤,用 $X(z)$ 以 k 域基序(频域)展开为例, $z \leftrightarrow$ DFT.

$$X(z) = \sum [X[k]] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] z^{-k}.$$

↑ 只要用 IDFT 替换其即得。

在连续和离散之间的内插,需为黎曼积分进行变形,如。

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) e^{j\omega nT} T.$$

↑ 再用 IDFT 代入。

一个有趣的发现,上述公式有

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= X(jk\omega_0) = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) e^{j\omega nT} \\ &= T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j2\pi n} \\ &= T \cdot X(e^{j\omega}). \end{aligned}$$

这是一种很新颖理解采样方式,用无限多长方形来面积拟合积分,竟能对应采样变换的能量关系,以前想求得 T, 只能一步一步推导。

这些引起我的两个思考,一个思考无需验证,另一个需再继续研究

- 一下:
1. 一个函数按不同基序展开,从而获得不同的意义和结果
 2. 变换之间的能量关系,不同域的幅值究竟有什么关系。

对表观的新理解,无非就是一种技巧,所有参项的自变量的因子如消去积分变量,留下自变量,则皆都是如此。

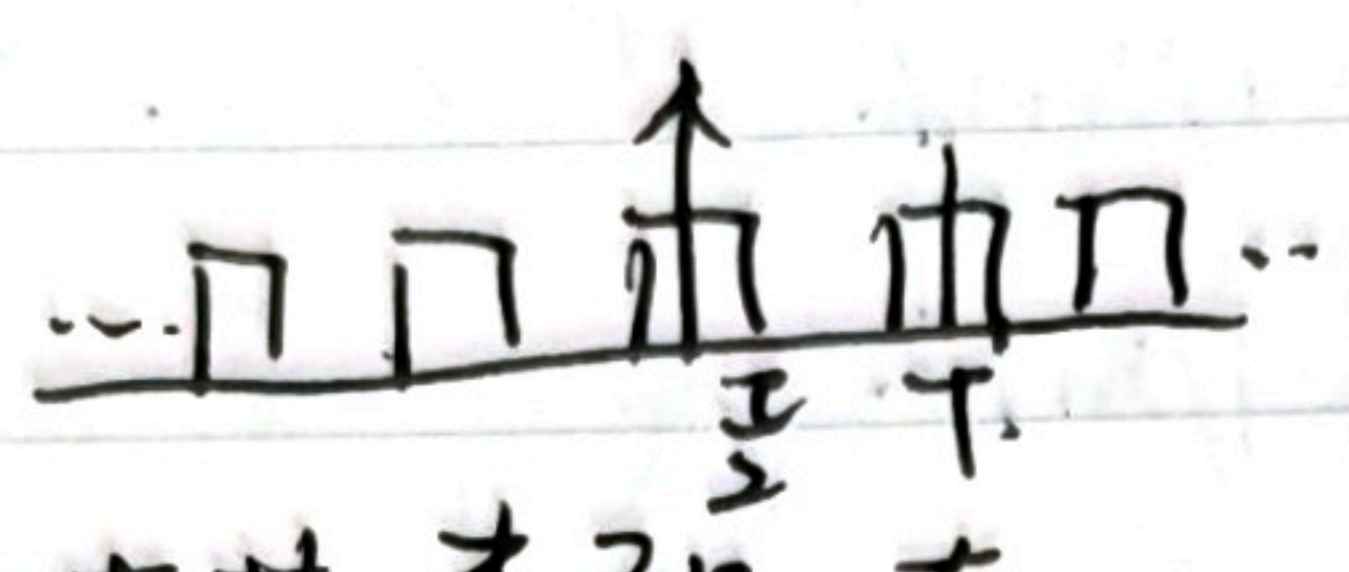
$$H(e^{j\omega}) = H_a(e^{j\omega}) \otimes W(e^{j\omega})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H_a(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \quad \omega + (-\omega) = 0.$$

12. 三种经典的采样方式

< 冲激采样 >

< 自然采样 >

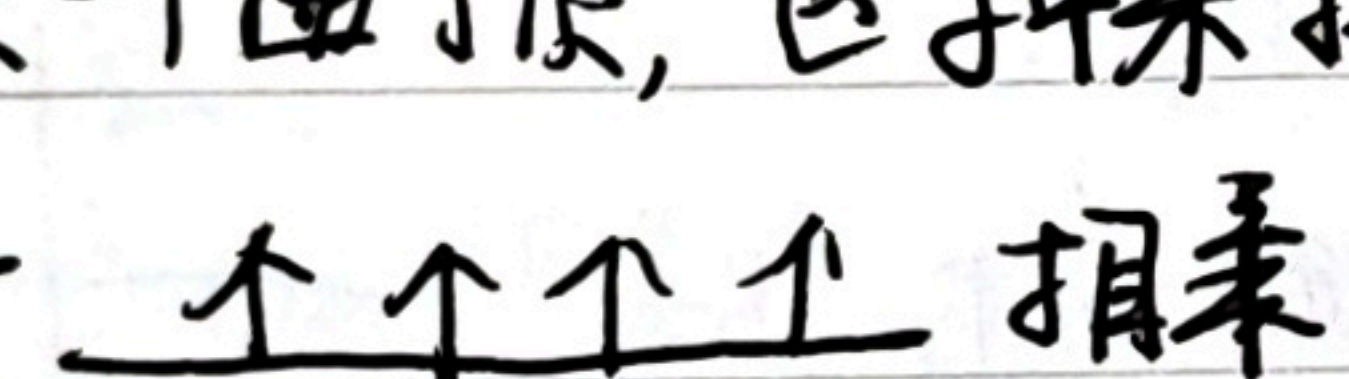
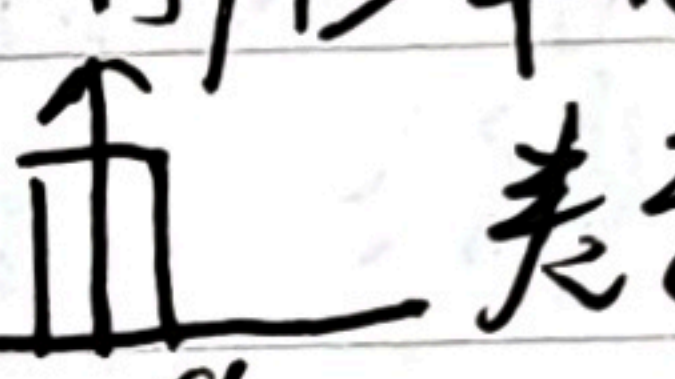
又称曲顶采样, 时域:  相乘.
频域: 其表达式有

$$* Y(j\omega) = 2\pi \sum_k \frac{\sin(k\omega T)}{k} X(j(\omega - k\omega_s))$$

可见, 每一个延拓的周期都被 sinc 因子给调制加权了, 重建的时候把这个因子乘回来就好.

< 平顶采样 >

与自然采样对比, 一个平顶一个曲顶, 这种采样很接近 A/D 中的采样.

时域: (加)  相乘) 再  卷积

频域有: $Y(j\omega) = 2 \frac{\sin(\omega T)}{\omega} \sum_k X(j(\omega - k\omega_s))$

可见, $X(j\omega)$ 的每一处都被加权了, 不过已经不会所有的系数, 重构需要构建这个因子相应的低通滤波器.

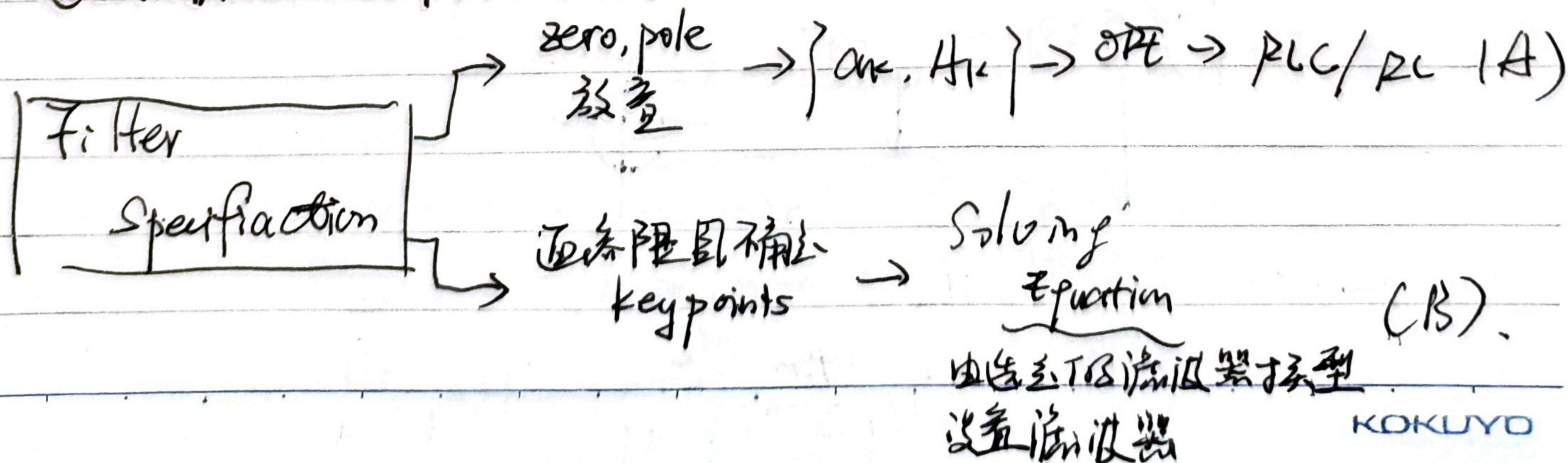
显而易见, 如果直接使用平顶采样信号, 高频分量少很多, 但一般不会这样用. (孔径效应).

使用采样保持电路可以较为的完成该采样.

13. 间接法设计 IIR 滤波器

所谓间接法设计 IIR 滤波器, 就是将离散指标转为连续指标, 再由连续指标设计连续滤波器, 再通过 $s \rightarrow z$ 的映射方法映射到离散.

① 连续滤波器设计方法 (模拟)



(A) 式是一种完全主观的设定方法, 上下限都不同, 可设计出比较精妙的, 而此些精妙的我们已经有现成模板, 这是前人总结的经验, 有这些, 我们根据具体目标确定滤波器参考即可 (B).

例如巴特沃斯滤波器.

$$|H_c(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}$$

其中, ω_c 为截止频率, N 为阶数, 有综合指标, 便可求得.

② $s \rightarrow z$, $\omega \rightarrow \omega$ 变换方式.

a) 脉冲响应不变法.

时: 对连续域采样.

频: $z = e^{sT}$ 映射, 但

每个 $\frac{2\pi}{T}$ 区间都映射到

单位圆 (这样说不妥, 应是整个 z 域), 这也就是混叠的根本.

$$\text{变换式} \begin{cases} h[n] = \alpha h_c(nT) \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{\alpha}{T} H_c(j\omega) \\ z = e^{sT} \Rightarrow \omega = \omega_c T \end{cases}$$

虽说 $H(e^{j\omega}) = \frac{\alpha}{T} H_c(j\omega)$, 但混叠存在, 或者, 滤波器才无关.

步骤:

$$H_c(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k}$$

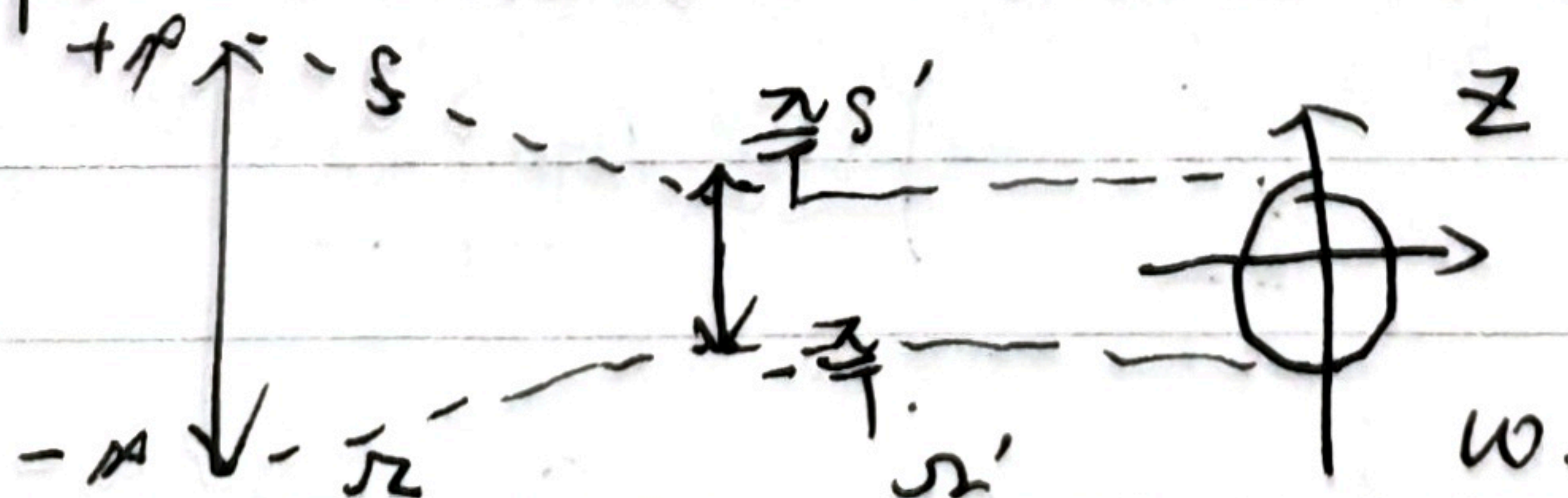
$$\downarrow$$

$$h_c(t) \rightarrow h[n]$$

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{T A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

b) 双线性变换法.

解决 a) 方法多对一映射关系, 将 s 域无偏后再映射.



$$s \rightarrow s': \quad \text{注意到 } \tan \frac{\pi}{2} \rightarrow +\infty, \tan \left(\frac{\pi}{2} \right) \rightarrow -\infty,$$

$$\text{构造 } \omega = \tan \frac{\omega_c T}{2}$$

$s' \rightarrow z$: 与 a) 一样, 线性映射, $w = \sqrt{2}T$.

$$s \leftrightarrow z = \begin{cases} \Omega = \tan \frac{w}{2} \\ w = 2 \arctan \Omega \end{cases}$$

使用欧拉公式展开再推导有: $j\Omega = \frac{1 - e^{-jw}}{1 + e^{-jw}}$

即 $s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$ 频率变换公式

即变换公式, 但我们经常加个系数, 系数哪来?

$$\Omega = \tan \frac{w}{2} \xrightarrow{w \rightarrow 0} \Omega = \frac{w}{2}$$

即每弧度线性相位, $\Omega = w/T$.

$$\text{那么 } \Omega = \frac{w}{2} \alpha, \alpha = \frac{T}{2}$$

$$\text{那么有, } \Omega = \frac{T}{2} \tan \frac{w}{2}$$

$$\text{变换式 } \begin{cases} \Omega = \frac{T}{2} \tan \frac{w}{2}, & w = 2 \arctan \frac{\Omega T}{2} \\ s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \end{cases}$$

可完好地还原模拟域幅值, 但线性相位不得保留, 相位非线性失真.

③ 系数作用与思想比较.

系数的作用就是, 没有任何作用, T 没有任何作用.

a) 对于幅值不变一般取 T , 若有一设计指标, (巴特沃斯).

$$|H(e^{jw})| \leq 1, \quad 0 \leq w \leq 0.2\pi$$

$$\rightarrow |H(e^{j\Omega})| \leq 1, \quad 0 \leq \Omega \leq \frac{0.2\pi}{T}$$

T 不同, 该值不同.

$$\text{求解中, } |H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{0.2\pi}{T\Omega}\right)^{2N}}$$

零极点由幅值平方
系数在幅值平方中不出现

那么任何 T 得到的 N 和 $T\Omega_c$ 都是相同的, 这意味着, $|H(j\Omega)|^2$

相同, 零极点相同, 零极点相同还有其它系数什么事, 都是一个 $H(z)$.

$H(z)$ 完全由 zero-pole 确定.

对于双线性映射原理, $\Omega = 2 \tan \frac{w}{2}$,

$$|H(e^{j\Omega})| \leq 1, \quad 0 \leq \Omega \leq 2 \tan \frac{0.2\pi}{2}$$

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\tan \frac{\Omega T}{2}}{\frac{\Omega T}{2}}\right)^{2N}}$$

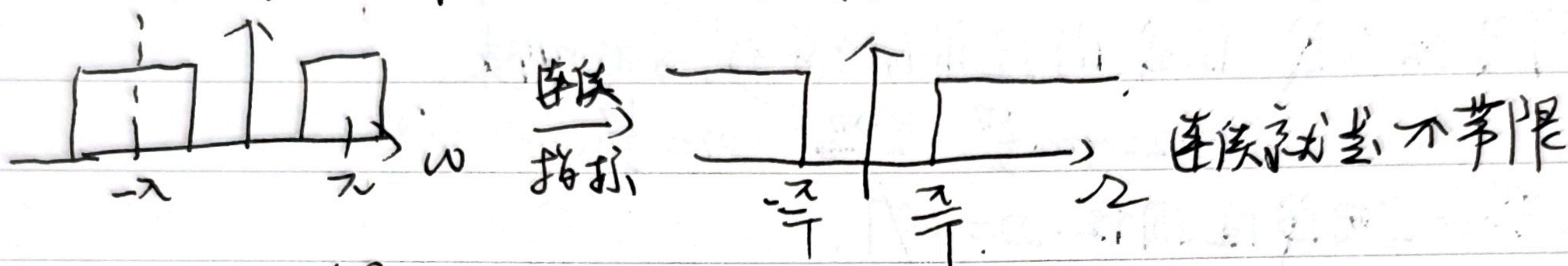
每秒钟 N 与采样率相同, 才又无失, 虚报点, 不变。

对滤波器无影响... 吗?

混叠怎么? T 小, T 大?? (响应不变)

别忘了, 连续 Filter 指标曲率极 Filter 综合, 即 $\Omega = \frac{\omega}{T}$,

采样率限才能采样不混叠, 与连续滤波器没有任何关系, 如我总做高通。



$\Omega = \frac{\omega}{T}$, 若 T 小, Ω 就大, T 大, Ω 就小, T 不可控制任何混叠, 混叠只与开始指标有关, 所以:

响应不变方法只适合低通设计。

双线性方法适合多段性滤波器设计, 如高通, 低通, 带通。

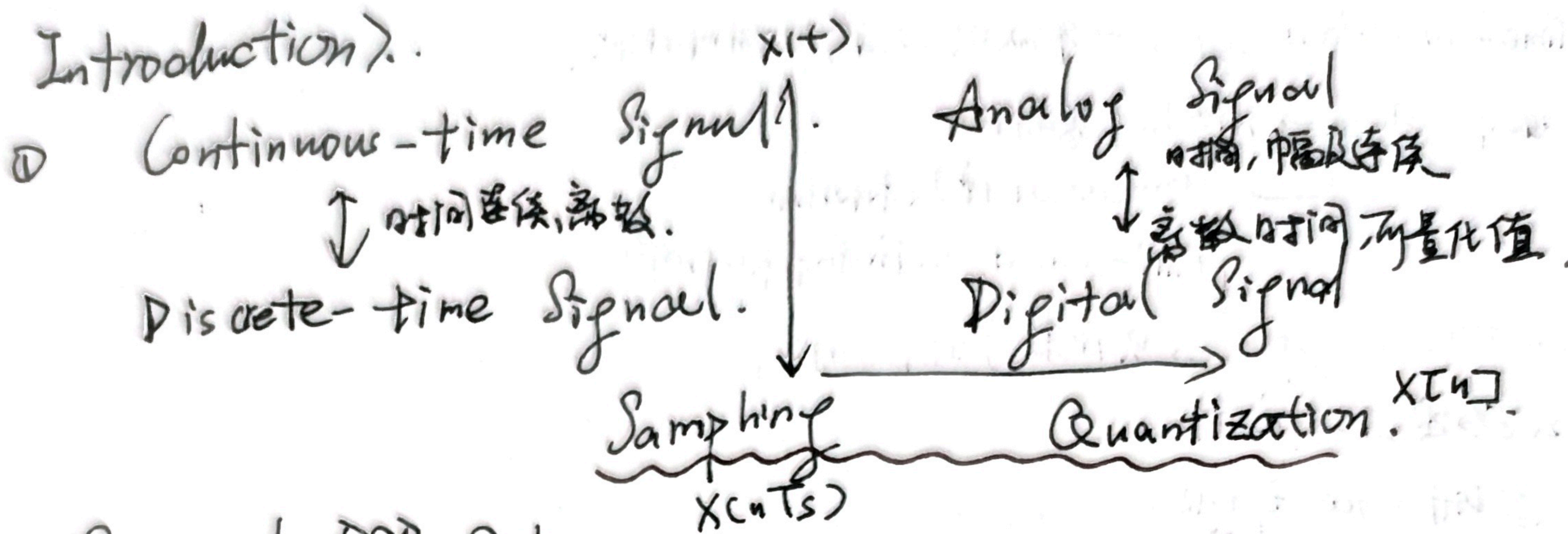
另外, 多提一句, 两种变换方式不管而滤波器解于系统因果, 没什么样, 还是什么样。

还有, 通过有低通 Filter 可经频率变换式得到其他低通, 高通, 带通, 带阻滤波器。

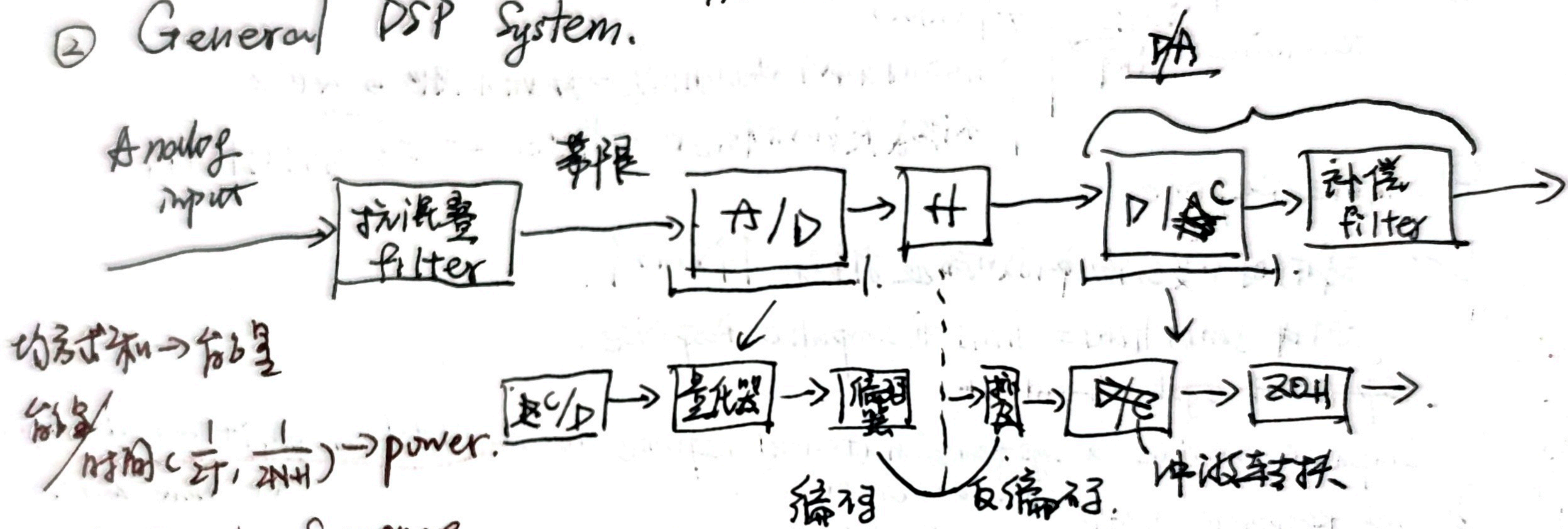
Digital Signal Processing. 课内总结.

Block 1. DSP Basics.

<1. Introduction>



② General DSP System.



③ Rectangular Sequence.
$$R_N[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n < 0, n \geq N \end{cases} = u[n] - u[n-N]$$

④ Amplitude response = amplitude ratio = $20 \log_{10} \frac{A_1}{A_0} \rightarrow$ output.

power ratio = $10 \log_{10} \frac{P_1}{P_0} = 10 \log_{10} \frac{P_i}{P_o}$. Decibel.

<2. Sampling and Quantization> Digitisation.

① 三种 Sampling.

A. 理想 Impulse sampling.

B. Natural Sampling 又称曲顶采样.

与周期脉冲信号相乘, 易被噪声污染.

C. Flat-top Sampling.

看成周期脉冲取相乘积, 再对脉冲求和.

Aperture effect 高频分量丢失 $\rightarrow$ Aperture error.

$\rightarrow$ 通过调整脉冲或使用 equalizer circuit 缓解.

很多教材说: Sample and Hold circuit, 高电平跟随, 低电平保持 $T_s + T_h =$ 一个采样/保持周期.

② 量化

N 个位, $\Delta = \frac{V_{max} - V_{min}}{2^N} = \frac{V_{max} - V_{min}}{2^N}$

$a_n = V_{min} + (n + \frac{1}{2})\Delta, n = 0, \dots, 2^N - 1 \Rightarrow \begin{cases} a_0 = V_{min} + \frac{\Delta}{2} \\ a_{2^N-1} = V_{max} - \frac{\Delta}{2} \end{cases}$

量化误差是差值的绝对值

量化上 ZOH 处理中量化后的信号, 此时已经是连续信号

③ 采样和量化, ZOH 用于两个地方

→ D/A, 输入为数字信号

PPT 上 - 詹姆斯的理论为人作工

ZOH → DAC

→ A/D, 输入的为连续信号 (模拟)

sample and hold ADC

不是二而是 <, 交界处所能测量

3. Aliasing

① Nyquist frequency = $\frac{f_s}{2}$ Nyquist rate f_s

f_n 最高分辨率

最大带宽 (Hz)

采样率应大于奈奎斯特频率 (最低采样率不可等, 再下一点)

② Undersampling → Aliasing, 1 后号中出现其他频率量

解释太所

寻找混淆频率是一个优化问题: $\min |nf_s - f|$ 或 $\min |f - nf_s| = f_a$

s.t. $n \geq 0$

f 混淆到 f_a

③ 那么, 如果已知频率被混淆, 是否可以反推原频率 (相对简单三角函数)

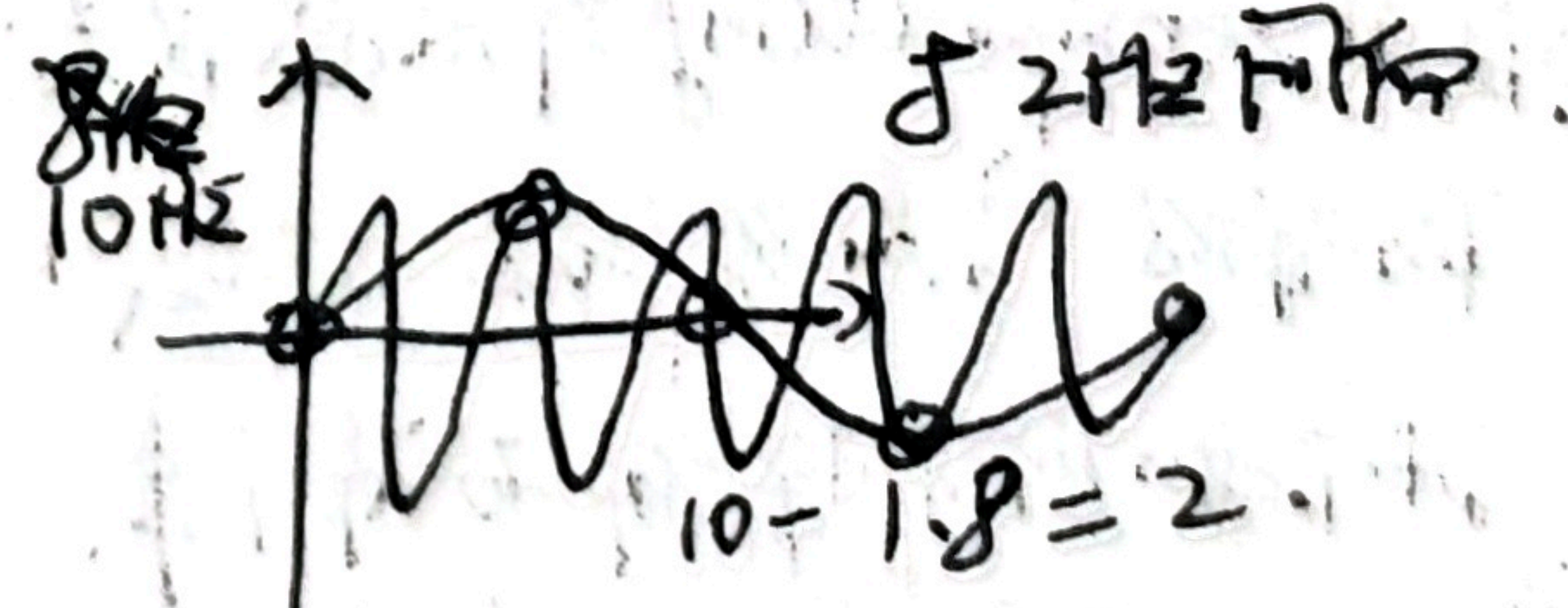
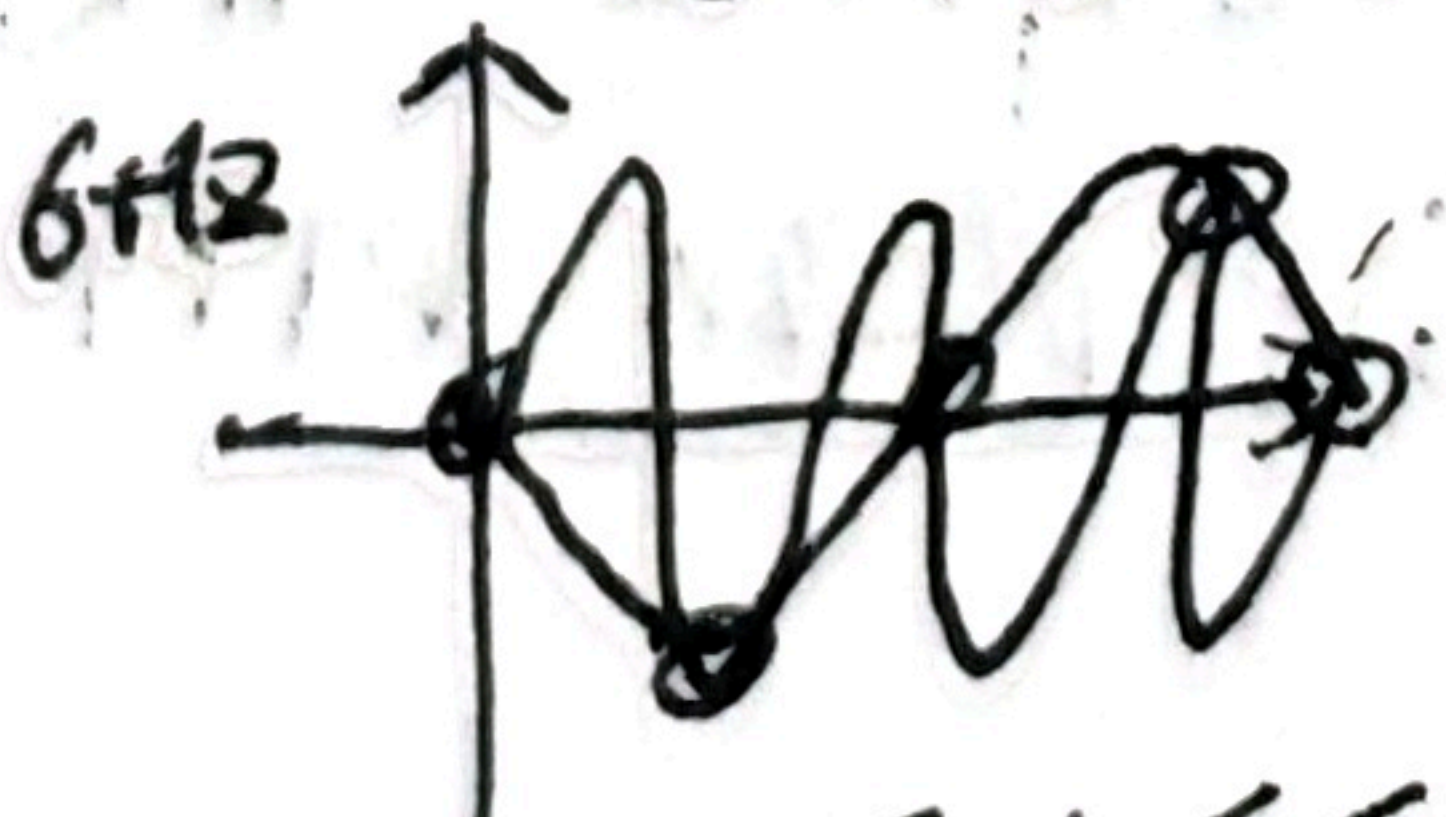
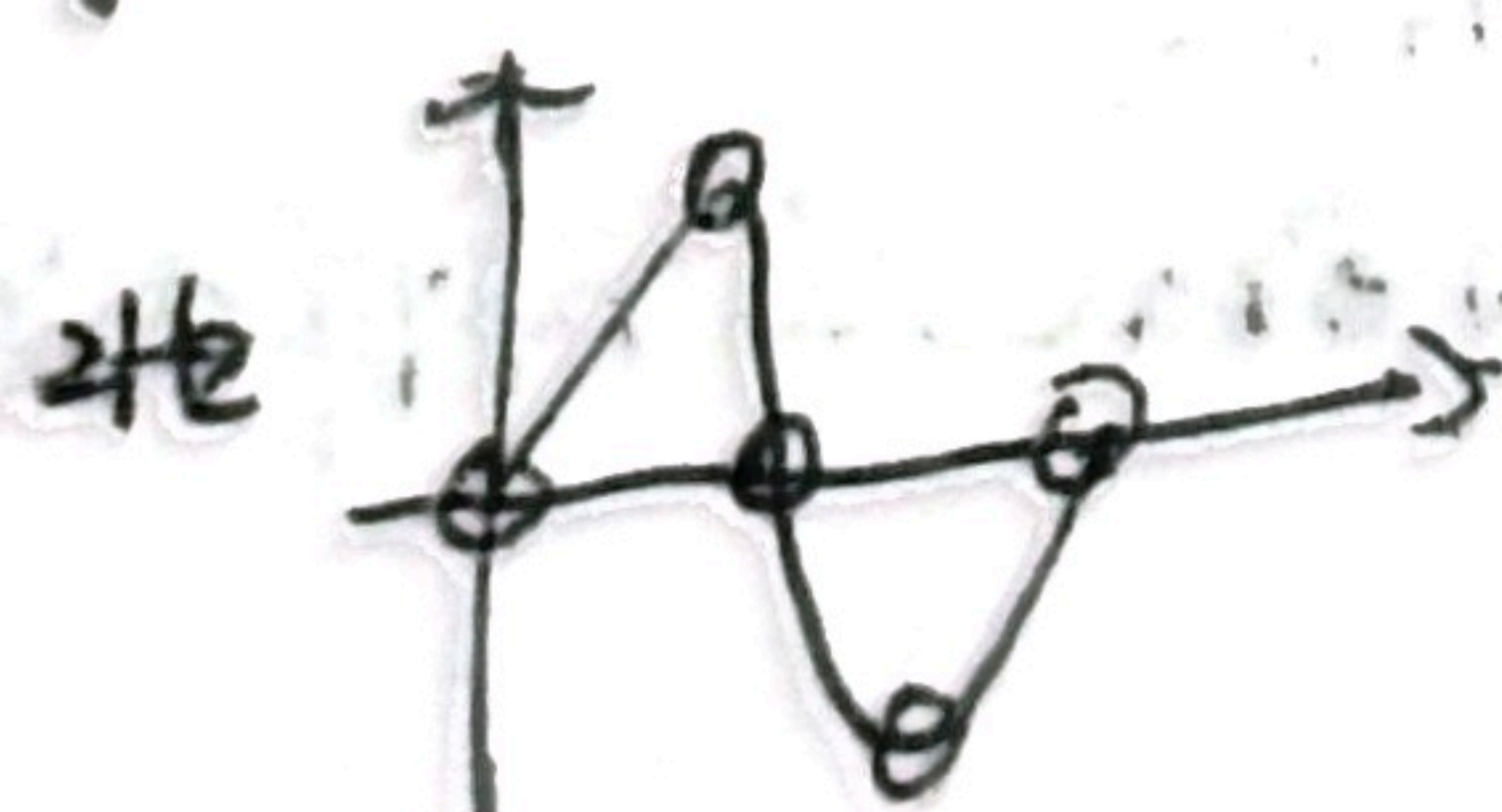
利用 $f_a = f - nf_s$, 即另一个优化问题 (也是同一类型)

$f_a = f - nf_s, n \geq 0$

$\min_n |f - nf_s|$ 即存在 n , s.t. $f_a = f - nf_s$ Offset - 误差, 反之相反

如果 f_a 是负的, 那么判断信号的相位变化, 反之混淆信号完全相同

例如, 以 8 Hz 采样, 6 Hz 和 10 Hz 都被混淆到 2 Hz (sin 函数)



所以, 如果已知一些信号被混淆到 $x(t) = \sin(2\pi f_a t)$, 虽然可以得知混淆前信号可能的频率, 但是其相位各不相同

4. Convolution

a input then flip in time version of itself → 卷积对称

① 线性卷积结果对称 (自身中轴对称) ↔ 卷积的两个信号自身对称

② 离散卷积表积 $f[n] * g[n] = \sum_k f[k]g[n-k]$ 卷积之和为, 卷积结果 $x+y=n$ 一致

- 可以用表格法来求和, 注意表格横纵列的起始标号一致相同

- 用循环矩阵, 需子用 $N+N-1$ 提前确定长度

- 也可以用定义

③ 圆卷积
序列长度必须通过补零达到相等，周期为 \$N\$ 为积，长度在运算中不变。

$$f[n] \otimes g[n] = \sum_{m=0}^{N-1} f[(n-m) \bmod N] g[m]$$

(取模符号, $\langle 3 \rangle_2 = 1, \langle 1 \rangle_2 = 1 \xrightarrow{(-2+1)}$)

循环卷积，卷积矩阵为循环矩阵
离散卷积的线性卷积和圆卷积的卷积形式都是卷积移位构造，不同的就是
圆卷积卷积有周期移位，而离散卷积卷积来平移处为0。

Toplitz \$\rightarrow\$ Circular 循环矩阵
Linear \$\rightarrow\$ Circular 圆卷积

④ 借用 FFT 实现圆卷积代替线性卷积方法

重叠相加

重叠保留

PPT 中的方法是对于卷积 0 直至卷积长度相等，

即卷积圆卷积的补长为 \$M+N-1\$

Block 2, Transform Methods.

<1. 连续域变换> FS, CTFT, Laplace \$\rightarrow\$ 单也。

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

(书中定义为 \$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\$，非归一化 sinc 函数)

$$x[n] = x[nT_s]$$

相互推导 \$\rightarrow x[n] \sum_n \delta[n-m]\$

<2. 离散域变换> DTFT, Z, ROC

① Z 变换的初值定理 $\lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = \lim_{z \rightarrow \infty} z X(z)$

\$\rightarrow\$ 对于 \$x[n]=0, n < 0\$ 的信号

② 逆 Z 变换，只考虑有理函数，注意讨论 ROC，系数展开。

<3. DFT>

① \$k \rightarrow \omega \rightarrow \Omega\$

$$\frac{2\pi}{N} k = \omega = \Omega T, \quad k = \frac{\Omega T N}{2\pi} = \frac{\Omega f N T}{2\pi} = N T f$$

$$f = \frac{k}{N T} = k \frac{1}{N T} = k \frac{f_s}{N}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ w_N^1 & w_N^2 & w_N^3 \\ w_N^2 & w_N^4 & w_N^6 \end{bmatrix}$$

② 使用 zero-padding 可以提供更多的采样，但是没有更多信息。

所有的信息都被时域加窗所限制，DFT 的谱已经分辨率不清，DFT 如何采样都无济于事。

③ 周期性 (Periodicity) 和 (Symmetry) \$\rightarrow\$ FFT 的性质。

④ 使用频域相乘算时域圆卷积。

<4. FFT>

① ceil 并序，不小于符号矢量的最大整数，\$\text{ceil}(\log_2 P) = 4\$

用于确定 FFT 的位数。

$$\sum_n (x[n] \pm w_N^{kn} x[2n+1]) w_N^{kn}, \quad X[k] \pm w_N^{kn} X[2k]$$

② DIT \$\rightarrow\$ 先 DFT 再串性组合，输入 Bit-reversed 组合

DIF \$\rightarrow\$ 先串性组合再 DFT，输入 Bit-reversed 组合。

并序乘积，2 加法，1 乘法。

\$\log_2 N\$ 个蝶形单元 (蝶形图)

$$L_c = \frac{1}{2} \log_2 N, \quad M_c = \frac{1}{2} \log_2 N$$

Block 3. DSP system.

<1. DSP 系统性质>

Linear system $\rightarrow$ $\left. \begin{matrix} \text{homogeneous} \\ \text{additive} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{superposition}$

Time-invariant system $\rightarrow$ 输入时移, 输出相同时移.

Causal system $\rightarrow$ 不依赖未来时间

$\rightarrow$ Non-causal 依赖未来时间
Anti-causal 只依赖未来时间

memoryless system $\rightarrow$ 只依赖于当前时间

<2. 描述 LTI 系统>

① Difference Equation

recursive 递推

递推 (类似)

$n < 0$ 时输入输出为 0 且因果 $\rightarrow$ 初始条件 $\rightarrow$ 双边 Z

不满足初始条件 $\rightarrow$ 单边 Z $\leftarrow$ 二者时移性质不同.

② Impulse Response.

线性时不变系统冲激响应推导出 $\{x[n]\}$.

利用 $\delta[n] + h[n] = h[n]$ 为 Impulse Response.

represent system's output

Impulse provides a system's natural response to a sudden, unit magnitude input at time zero.

③ Step Response

react sudden change
constant change

Step response show how the system responds to a sudden change in input.

输入 $u[n]$, 输出 $s[n]$.

④ Frequency Response.

describes how the system responds to sinusoidal input signals of different frequencies.

a) Amplitude Response.

$|H(e^{j\omega})| = \sqrt{H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega})}$, $\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{f}{f_s} \rightarrow$ normalized frequency

b) Phase response.

determine the amount of time delay that the system introduces to different frequency components of the input signal.

$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\angle H(e^{j\omega})}$

$\angle H(e^{j\omega}) = \arctan \frac{\text{Im}(H(e^{j\omega}))}{\text{Re}(H(e^{j\omega}))}$

Linearly phase $\rightarrow$ 相位响应是线性函数, 群延迟为 constant $\rightarrow$ 波形 shape 不变.

⑤ Transfer Function.

$\sum a_i y[n-i] = \sum b_j x[n-j] \Rightarrow \sum a_i z^{-i} Y(z) = X(z) \sum b_j z^{-j}$

$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum b_j z^{-j}}{\sum a_i z^{-i}} \Rightarrow$ 反推 Difference equation. (给定 $h[n]$)

但是若用部分分展开求取, 其实并不用也. 因为 $\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}$ 可以直接反推.

<3. Stability>

① Poles and Zeros.

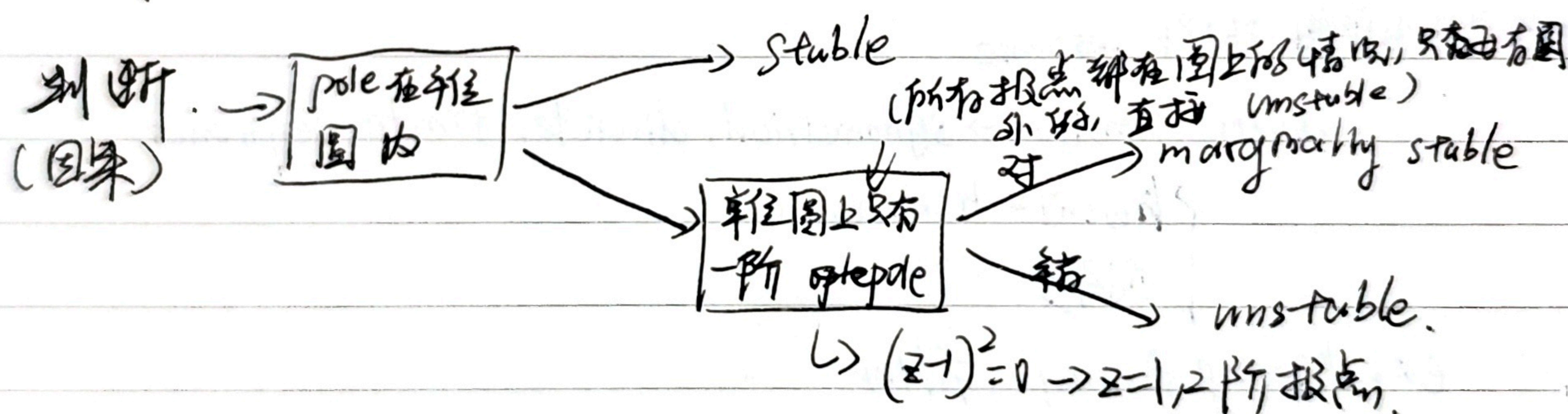
The location of zeros influences the system's response and the frequencies at which it attenuates or amplifies signals.

The location of poles affects the stability and dynamics of the system.

使用z的幂表示用于表达 Transform function, 零极点 (0x) 表示各频率。

② Stability

Marginally stable system will neither return to ^{steady-state} equilibrium nor diverge but will either continue oscillating indefinitely with a constant amplitude or remain at a non-zero constant output in response to the disturbance.



Block 4.

<1. 滤波及滤波引入>

用解 } Signal separation, when a signal has been contaminated with noise.
Signal restoration, when a signal has been distorted in some way

① 框图

$\sum a_i y[n-i] = \sum b_j x[n-j]$, 一般用 $y[n] = -\sum a_i y[n-i] + \sum b_j x[n-j]$ 表示。



② Step Response

Setting Time: 从开始到在容限内稳定时间

Overshoot: basic distortion of the information contained in the time domain.

phase linearity: symmetrical.

⑤ Frequency Response.

a) Amplitude Response

- passband : pass, ripple.
- transition band: narrow, fast roll-off
- stopband : stop band attenuation.

④ 滤波器组合.

全通 (All pass) $(X(z) * S(z))$ - Loss pass $\rightarrow$ High-pass

有 Loss pass 和 High pass, 可以组成 Band-pass, Band-stop.

<2. FIR 滤波器设计>

所有 pole 都在原点, stability 有保障, 通常有 linear phase.

$\frac{\sin \pi n}{\pi n} \rightarrow$ PPT 上定义的 sinc 函数.

将一已有的 Truncate $\rightarrow$ introduce ripples and overshoots.
该变为有限 shift response

window function $\rightarrow$ symmetrical, discrete, finite sequence

$$\begin{cases} h_w[n] = h[n] \cdot w[n] \\ \text{时移} \end{cases}$$

EX. Moving Average Filter

decrease the amplitude of the random noise, but reduce the sharpness of the edges.

在 PPT 中

Hamming window : some smoothing

Hamming window : ~~eliminate~~ eliminate high frequency noises.

Rectangular $\rightarrow$ abrupt truncation.

< 3. IIR 滤波器设计 >

① IIR $\rightarrow$ 因为 feedback, 所以 infinite, non-linear phase response.

greater attenuation of frequency components, sharper frequency roll-offs, 有时比 FIR 快.

优 $\left\{ \begin{array}{l} \text{cheap, easy} \\ \text{Low computational complexity} \\ \text{sharper frequency roll-offs} \end{array} \right.$

缺 $\left\{ \begin{array}{l} \text{unstable} \\ \text{non-linear response} \end{array} \right.$

② Bilinear Transform.

间接法, 模拟 $\rightarrow$ 离散 $\rightarrow$ 离散.

$$H(z) = H(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \rightarrow \text{模拟滤波器} \rightarrow \text{离散滤波器} \rightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} \text{的离散化}$$

PPT 中 采取一种多项式表示 (艺术) 形式理解双线性.

frequency warping effect: $\omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\Omega}{2} \cdot T$

频率畸变 $\Omega \sim \omega$, 非线性.

在设计指标时, 使用 $\omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\Omega}{2} \cdot T$ 进行 pre-warp.

③ Butterworth Filter 设计. (低通).

~~$$|H_a(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}}$$~~

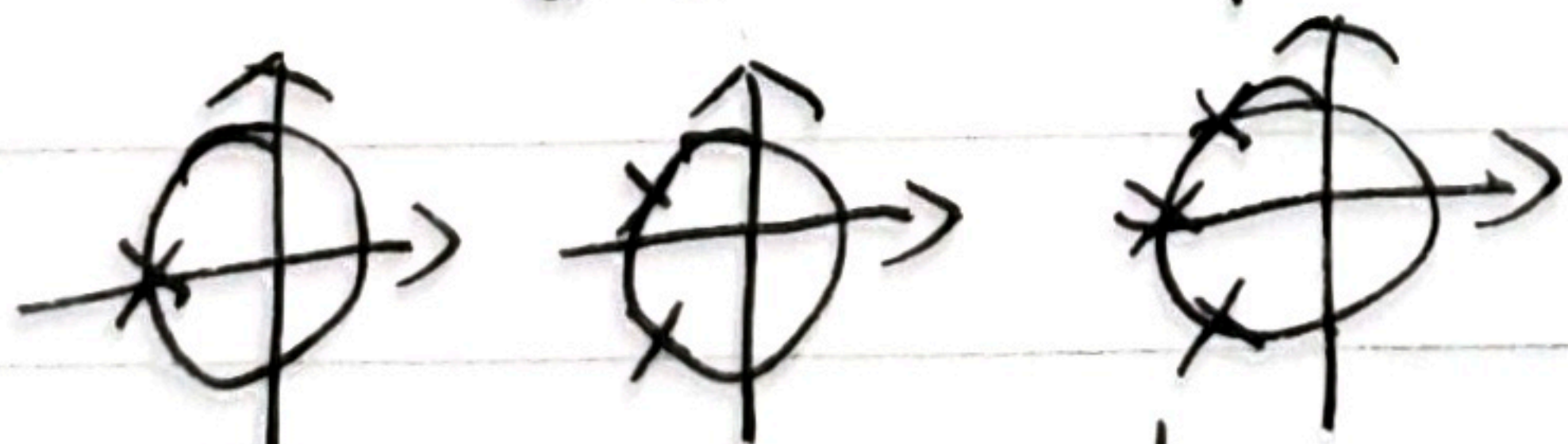
$$H_a(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}}$$

则 $H_a^2(j\omega) = \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}} \right)^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}$

缺点, steeper rolloff, but, phase distortion, unstable.

由 $1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}$ 设置极点, $1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N} \Rightarrow 1 + \left(\frac{s}{j\omega_c}\right)^{2N} = 0, s = j\omega_c e^{j\frac{(2k+N+1)\pi}{2N}}$

根在单位圆上分布.



圆的半径为 ω_c .

1-order.

$$H(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_c}}$$

3-order

$$\frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

把 s 换成 $\frac{s}{\omega_c}$ 即可.

2-order

$$H(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2 + \sqrt{2}\left(\frac{s}{\omega_c}\right) + 1}$$

$\rightarrow$ 本节课主要讨论 ω_c 和 N 的设计, 为什么设计? 标准.