

Signals and Systems.

一、信号系统.

二、~~LTI~~ 系统.

三、FS, DTFS.

四、FT, DTFT. 奇点讨论.

五、Sampling.

六、Laplace transformer.

七、Z transformer.

收敛域.

一、信号系统.

1. 自变量变换 (信号) $\left\{ \begin{array}{l} x(t) \rightarrow x(t+\beta), \text{ 左移 } \beta \text{ 秒, 右移 } \beta \text{ 秒, 又进行反折及变换.} \\ \text{注意: 变换只对自变量而言, 一切往自变量上靠, 如 } x(t+1) \xrightarrow{\text{时间反折}} x(-t+1). \end{array} \right.$

2. 任何信号都可称为奇信号和偶信号之和.

3. 信号能量 $E = \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-N}^{+N} |x[n]|^2$

信号功率 $P = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} |x[n]|^2$

$\Rightarrow$ 能量有限, 功率有限, 功率有限.

4. 单位冲激函数.

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left[u(t+\frac{\Delta}{2}) - u(t-\frac{\Delta}{2}) \right]$$

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} u(t), \quad u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) dt, \quad \frac{d\delta(t)}{dt} = \frac{\delta(t+\frac{\Delta}{2}) - \delta(t-\frac{\Delta}{2})}{\Delta}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta'(t-t_0) dt = - \frac{d}{dt} f(t) \Big|_{t=t_0} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta^{(n)}(t-t_0) dt = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} f(t) \Big|_{t=t_0}$$

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t), \quad a > 0$$

5. 斜坡函数 (Ramp Function).

$$r(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} = t u(t), \quad r[n] = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} = n u[n]$$

6. $\text{sgn}(t) = 2u(t) - 1$

6. 系统性质.

记忆 (是否取过去时间输入)

可逆 (不同输入不同输出, 一一映射)

因果 (输出只依赖于过去及当下)

稳定 (BIBO) $|x(t)| < B \Rightarrow |y(t)| < A$

时不变 (Input 时移, output 产生同样时移, 时不变) 或 $(Hs^t = s^t H)$

线性 (Superposition and Homogeneity)
线性证明 $x(t) \rightarrow \boxed{H} \rightarrow y(t)$

$$\text{令 Input: } x(t) = \sum_{i=1}^N a_i x_i(t)$$

$$\text{则 output: } y(t) = \sum_{i=1}^N a_i y_i(t), \text{ 则为线性}$$

重新输入 n 倍则为重新输出

$$\sum_{k=n}^{k=n+m} 2^k \rightarrow \text{法取 } (n+m)-(n)+1 = m+1$$

二. LTI 系统

1. 卷积和

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] = x[n] * h[n] \quad \left(\text{注意卷积和直接求 } \frac{1-kz^{-1}}{1-az^{-1}} \right)$$

2. 卷积积分 $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = x(t) * h(t)$

在进行 Convolution 运算时, 主元一直为 k 或 τ , t 或 n 仅仅为参数, 对 $h[n] \Rightarrow h[n-k]$ 的变换为, $h[n] \xrightarrow{\text{变量代换}} h[k] \xrightarrow{\text{反转}} h[-k] \xrightarrow{\text{移位}} h[n-k]$ 注意, 总的移位量为右移 n ($n > 0$) 或左移 n ($n < 0$)

在统一代换处理时, 全取 $n > 0$, 即而假设 $n > 0$, 而右移之

3. 线性时不变性质

交换, 分配, 结合 (已知表微分)

记忆, 如果无记忆, $h[n] = k \delta[n]$, $h(t) = k \delta(t)$ ($k = h(0)$ 为常数)

可逆 $h[n] * h_{inv}[n] = \delta[n]$

因果 $h[n] = h(t) = 0, (n < 0, t < 0)$. (initial rest, 初始松弛)

稳定 BIBO, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty, \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty$

4. 单位阶跃响应 (unit step response)

$$s[n] = u[n] * h[n], s(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau, \left\{ \begin{array}{l} \frac{ds(t)}{dt} = h(t) \\ s[n] - s[n-1] = h[n] \end{array} \right.$$

5. Block Diagram Representations

$$x[n] \xrightarrow{C} Cx[n]$$

$$x(t) \rightarrow \boxed{\int} \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

三、FS, DTFS.

1. eigenvalue, eigenfunction.

Laplace.

$$e^{st} \rightarrow [h(t)] \rightarrow e^{st} * h(t) = e^{st} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau = e^{st} H(s).$$

$$z^n \rightarrow [h(k)] \rightarrow z^n * h(k) = z^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) z^{-k} = z^n H(z).$$

2. FS, DTFS.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] e^{jk\omega_0 t} \xleftrightarrow{FS} x[k] = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt.$$

$$\cancel{x[k]} = \cancel{x[n]} \quad x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] e^{jk2\pi n} \xleftrightarrow{DTFS} x[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jk2\pi n}$$

$$3. \text{sinc}(u) = \frac{\sin(\pi u)}{\pi u}.$$

四、FT, DTFT, Laplace.

$$\left\{ \begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, & X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, & \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta(\omega - k\omega_0) \\ x(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds, & X(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt, & \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt \end{aligned} \right.$$

1. 收敛域 (Laplace).

有理信号, 左边信号 $\xrightarrow{\leftarrow}$, 右边信号 $\xrightarrow{\rightarrow}$, 双边信号 $\xleftrightarrow{\leftarrow \rightarrow}$.

$\xrightarrow{\leftarrow}$ 左半平面, 稳定, 收敛域已标在右半平面 (从极点向右) 因果.

2. Time-Bandwidth Product (时间带宽积).

有效时宽, 有效带宽均有严格定义, $T_a B_w \geq \frac{1}{2}$.

$$T_a = \left[\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |x(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad B_w = \left[\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |X(j\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega} \right]^{\frac{1}{2}}$$

effective duration effective bandwidth.

3. 对偶性质 (Duality Property of FT).

$$\boxed{\begin{aligned} f(t) &\xleftrightarrow{FT} F(j\omega) \\ F(j\omega) &\xleftrightarrow{FT} 2\pi f(-t) \end{aligned}}$$

五. DTFT, Z.

1. DTFT no Duality Property.

$$\cancel{x[n]} \leftrightarrow \cancel{X(e^{j\omega})} \quad \left[\begin{array}{l} g[n] \leftrightarrow f[k] \\ f[n] \leftrightarrow \frac{1}{N} g[-k] \end{array} \right]$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega, \quad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}, \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta(\omega - k\omega_s)$$

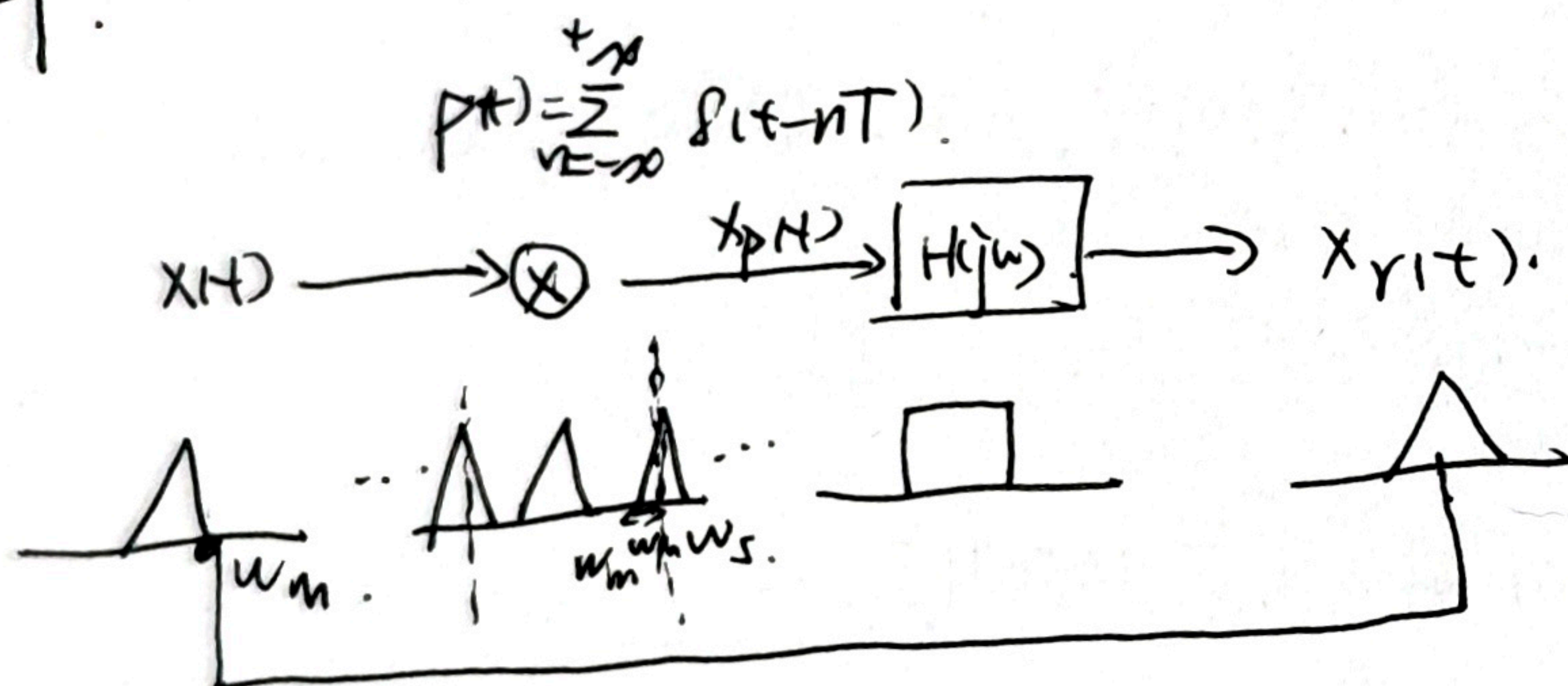
$$2. \quad x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz, \quad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

3. 收敛 (Z变换).

在单位圆外也, 因果, 讨论单位圆, 收敛.

同样用极点表示.

六. 采样.



$$H(j\omega) = \begin{cases} T_s, & |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2} \\ 0, & |\omega| > \frac{\omega_s}{2} \end{cases}$$

$\omega_s \geq 2\omega_m$, ω_s 奈奎斯特采样率.

七. 系统.

$$x(t) \rightarrow [h(t)] \rightarrow y(t) \Leftrightarrow X(j\omega) \rightarrow [H(j\omega)] \rightarrow Y(j\omega), \quad H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

差分方程或微分方程表述, 使用性质: magnitude response: $20 \log |H(j\omega)|$.

傅里叶变换对.

FT.

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases} \leftrightarrow \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}$$

$$\frac{\sin(Wt)}{\pi t} \leftrightarrow X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$

DTFT.

$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases} \leftrightarrow \frac{\sin[\omega(N_1 + \frac{1}{2})]}{\sin(\frac{\omega}{2})}$$

$$\frac{\sin(Wn)}{\pi n} \leftrightarrow X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\omega| < W \\ 0, & W < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

~~Laplace~~

$$(n+1)2^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{(1-2e^{j\omega})^2}$$

Laplace

$$\begin{aligned} \cos(\omega_0 t) u(t) &\leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, & e^{-at} \cos(\omega_0 t) u(t) &\leftrightarrow \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2} \\ \sin(\omega_0 t) u(t) &\leftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}, & e^{-at} \sin(\omega_0 t) u(t) &\leftrightarrow \frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2} \end{aligned}$$

Z.

$$-u[-n-1] \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}, |z| < 1.$$

$$(n+1)u[n] \leftrightarrow \frac{1}{(1-z^{-1})^2}, |z| > 1.$$

$$(n+1)2^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{(1-2z^{-1})^2}, |z| > 2.$$

LT

DTFT

Laplace

Z.

时移

时移

频移

复数

卷积

相乘

积分

微分

频移

其它

$$x(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

$$e^{j\omega_0 t} x(t) \leftrightarrow X(j(\omega-\omega_0))$$

$$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(j\omega) Y(j\omega)$$

$$x(t) y(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) Y(j\omega) d\omega$$

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi \delta(\omega)$$

$$\frac{d}{dt} x(t) \leftrightarrow j\omega X(j\omega)$$

$$j \frac{d}{d\omega} X(j\omega) \leftrightarrow t x(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

$$x[n-n_0] \leftrightarrow e^{-j2\pi n_0} X(e^{j2\pi})$$

$$e^{j2\pi n_0} x[n] \leftrightarrow X(e^{j(2\pi-2\pi_0)})$$

$$x[n] * y[n] \leftrightarrow X(e^{j2\pi}) Y(e^{j2\pi})$$

$$x[n] y[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) Y(e^{j(2\pi-\theta)}) d\theta = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\theta}) \otimes Y(e^{j\theta})$$

$$n x[n] + x[n]$$

$$x[n] - x[n-1] \leftrightarrow (1-e^{-j2\pi}) X(e^{j2\pi})$$

$$j \frac{d}{d\omega} X(e^{j2\pi}) \leftrightarrow n x[n]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j2\pi})|^2 d\omega$$

$$x(t-t_0) \leftrightarrow e^{-s t_0} X(s)$$

$$e^{s_0 t} x(t) \leftrightarrow X(s-s_0)$$

$$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(s) Y(s)$$

$$x(t) y(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} X(s) Y(s) ds$$

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} X(s) + \frac{x(0^-)}{s}$$

$$\int_0^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} X(s) - \frac{x(0^-)}{s}$$

$$\frac{d}{dt} x(t) \leftrightarrow s X(s) - x(0^-)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) \leftrightarrow s^2 X(s) - s x(0^-) - x'(0^-)$$

$$t x(t) \leftrightarrow -\frac{d}{ds} X(s)$$

$$\frac{d^n}{dt^n} x(t) \leftrightarrow s^n X(s) - s^{n-1} x(0^-) - \dots - x^{(n-1)}(0^-)$$

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s X(s)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s X(s)$$

$$x[n-n_0] \leftrightarrow z^{-n_0} X(z)$$

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \leftrightarrow X(e^{-j\omega_0} z)$$

$$\cancel{z^{-n_0} x[n] \leftrightarrow X(z z_0)}$$

$$x_1[n] * x_2[n] \leftrightarrow X_1(z) X_2(z)$$

$$\cancel{x_1[n] x_2[n]}$$

$$x[n] y[n] \leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} X(z) Y(z) dz$$

$$n x[n] + x[n]$$

$$n x[n] \leftrightarrow -z \frac{dX(z)}{dz}$$

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$