

DSP 数字信号处理

1. 对信号的一种理解方式 (LTI).

信号是一种函数, 信号进系统便是一种函数运算.

$$y[n] = T\{x[n]\}$$

将 $x[n]$ 以 $\delta[n]$ 为 $\Rightarrow T\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right\}$.

基扩展开 $\Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] T\{\delta[n-k]\}$.

时移 $\Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] = x[n] * h[n]$

可见, 表征了 LTI 系统关系.

2. 系统性质的判断 (性质是系统客观存在的特点, 对信号无关),

系统性质, 必然要从信号入手, 寻找系统的判断标准?

$h[n] = T\{\delta[n-k]\}$ $\rightarrow$ 意味对 $\delta[n]$ 基底的坐标变换或令其为冲激响应. 可见, 系统是为一组基的作用而并非对一组信号的作用, 系统的性质不完全由其冲激响应得到.

从 $h[n]$ 入手判断因果性和稳定性 (BIBO).

$$h[n] = 0, n < 0 \Rightarrow \text{因果}.$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \Rightarrow \text{稳定}.$$

3. 特征向量和变换的引入.

回顾卷积.

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k].$$

计算卷积是一个复杂的过程, 但我们有它的特征向量, $e^{j\omega n}$ ($x[n] = e^{j\omega n}$ 假设).

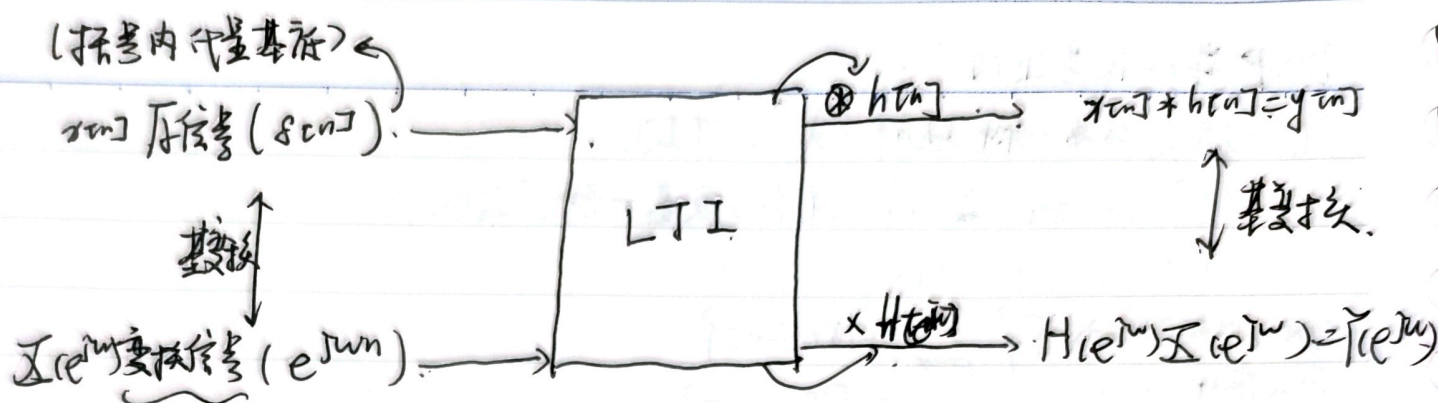
$$y[n] = e^{j\omega n} * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j\omega n} e^{j\omega k} = e^{j\omega n} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j\omega k} \right) = H(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega n}$$

(这个 $e^{j\omega n}$ 是 $e^{j\omega n}$, 但是仍在 $\delta[n]$ 基上, 所以求出的 $y[n]$ 在 $\delta[n]$ 基上)

特征 (特征) 向量是系统的特征, 令进入系统仅仅相当于乘上一个常数.

那么, 通过 $\delta[n] \rightarrow e^{j\omega n}$ 的基变换, 便可以使信号进入系统就是乘一个常数, 而且这个常数与信号的频率 (基权重) 有关, 仅仅与基和 $h[n]$ 有关. 如此, 常数已知, 那么只需要基变换而已.

这就引入了变换的原因, 让卷积计算更加简单, 如下图所示.



变换信号具有丰富的物理意义，我们称其为频域信号， $e^{j\omega n}$ 也就是频域基函数，对应的 $x[n]$ 是时域基函数。

4. 对于 N 种不同序列的 DFT.

a) 序列绝对可和 → 频谱有限且连续

可以相互计算

b) 序列不绝对可和但平方可和 → 不收敛收敛。

例如理想低通滤波器，不可相互推出只能由一个到另一个反向推导收敛，无法计算。

c) 某些序列不绝对可和亦不平方可和但可通过定义使其有意义。

$$1 \xrightarrow{\text{DFT}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega + 2\pi k)$$

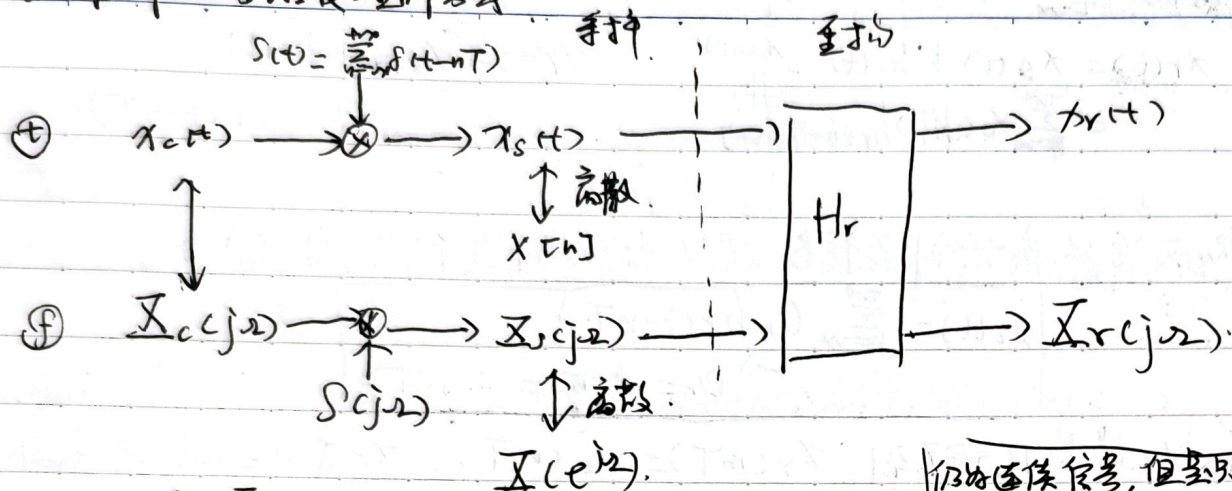
$$e^{j\omega_0 n} \xrightarrow{\text{DFT}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$$

几乎所有周期序列

$e^{j\omega_0 n} \xrightarrow{\text{DFT}} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$ 最为重要，可通过其求 $\cos, \sin$ 等函数的变换

5. 周期信号的变换。

6. 采样定理及重建公式



A. <从时域上看>

$$x_s(t) = x_c(t) * S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) \delta(t-nT)$$

B. <从频域上看>

$$S(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s), \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

$$X_s(j\omega) = X_c(j\omega) * S(j\omega) \cdot \frac{1}{T}$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\omega - k\omega_s))$$

仍为连续信号, 但只在 $t=nT$ 上拥有 $x_c(t)$ 一样的值(采样)

离散信号
采样 $\leftrightarrow$ 周期延拓
Spectrum shifting

相加 $\frac{1}{T}$, 对 $X_c(j\omega)$ 在整 ω_s 域上进行周期性延拓

C. <从离散到离散>

$$\text{假设最下的 } x[n], \quad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) e^{-j\omega n}$$

$$\text{回看 } X_s(j\omega), \quad X_s(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) e^{-j\omega nT}$$

可知 $X(e^{j\omega})$ 与 $X_s(j\omega)$ 唯一不同为 $e^{-j\omega n}$ 和 $e^{-j\omega nT}$; 对 $X_s(j\omega)$ 进行 $\omega = \frac{\omega}{T}$ 的尺度变换便可以得到 $X(e^{j\omega})$, 从而得到 $x[n]$.

$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$, $\omega = \frac{\omega_s}{T}$, $T = 2\pi$, $\omega_n = \omega$. 可见, 这种尺度变换, 在频域上就是频域归一化, 在时域上从 nT 到连续的 n , 也是时域归一化.

D. <采样与重构> ($x_s \rightarrow x_c$), ($x[n] \rightarrow x_s(t) \rightarrow x_c(t)$)

将 $x_s(t)$ 再通过一个低通滤波器, 滤掉延拓的周期信号, 便得到有限带宽信号 $x_c(t)$, $x_r(t) = x_c(t)$.

这是用并行形式分析.

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) \delta(t-nT) \quad x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \delta(t-nT)$$

$$x_r(t) = x_s(t) * h_r(t) \quad \xrightarrow{\text{decnt}}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) h_r(t-nT) x[n]$$

$$x_r(t) = x_s(t) * h_r(t)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] h_r(t-nT)$$

可知, 无论从采样到信号, 还是从 \$x_s(t)\$ 到信号, 其表达式为

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n h_r(t-nT) \quad \begin{matrix} \downarrow \\ a_n = x[n] = x_c(nT) \end{matrix}$$

可以从课本 P117 页看到 \$x_r(mT) = x_c(mT)\$, 对于 \$x_c\$ 在采样点处值完全相等, 由上式框内表达式, 可见, 取样, 无非就是对 \$x_c(t)\$ 以 \$h_r(t-nT)\$ [其实是 sinc 函数了] 在固定点进行展开, 结合上述全部推导, 我们可推出取样三个维度的理解.

一、一个域的周期延拓 \$\leftrightarrow\$ 一个域的取样.

二、假设已知 \$a_n\$ (\$x_c(t)\$ 的离散点), 对 \$x_c(t)\$ 进行以 \$h_r(t)\$ 为底的插值.

三、已知 \$x_c(t)\$, 对 \$x_c(t)\$ 进行以 \$h_r(t-nT)\$ 为基底的展开, 即 取样.

附 <拍拉术和> 采样就是周期延拓.

令 \$G(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t+kT)\$, 有解 \$G(t) = G(t+T)\$, 则 \$G(t)\$ 是延拓的 \$f(t)\$.

对 \$G(t)\$ 进行 FS 展开, ~~\$G(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t}\$~~ ~~\$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(t) e^{-j\frac{2\pi n}{T}t} dt\$~~ 那有.

$$G(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t}$$

其中, $a_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} G(t) e^{-j\frac{2\pi n}{T}t} dt$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t+kT) e^{-j\frac{2\pi n}{T}t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t+kT) e^{-j\frac{2\pi n}{T}t} dt$$

$$\xrightarrow{t'=t+kT} \frac{1}{T} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{T}{2}+kT}^{\frac{T}{2}+kT} f(t') e^{-j\frac{2\pi n}{T}t'} dt' \right)$$

将所有区间拼起来, 就是积分.

$$= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\frac{2\pi n}{T}t} dt$$

Fourier Transformation

$$= \frac{1}{T} F(j\frac{2\pi n}{T})$$

那么就有 $G(t) = \sum_n \alpha_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t} = \sum_n \frac{1}{T} f(j\frac{2\pi n}{T}) e^{j\frac{2\pi n}{T}t}$

$\downarrow$ FT

$$G(j\omega) = \sum_n \frac{1}{T} f(j\frac{2\pi n}{T}) \delta(\omega - \frac{2\pi n}{T})$$

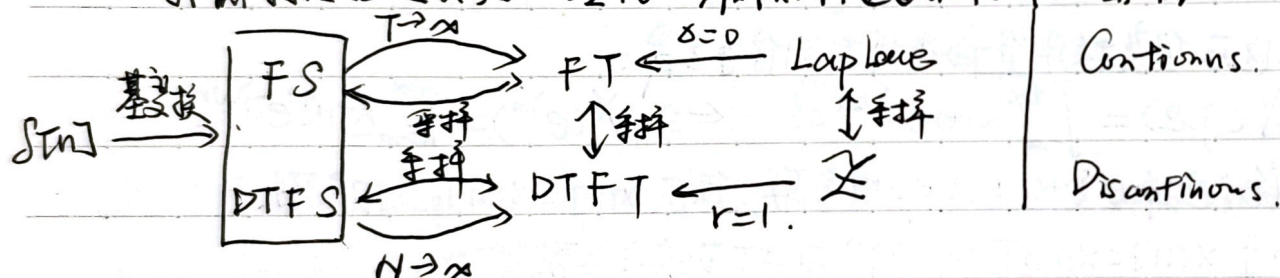
可见 $G(t)$ 是经过周期延拓的 $f(t)$.

$G(j\omega)$ 是 $f(t)$ 乘以 $f(j\frac{2\pi n}{T})$, 并且只在 $\omega = \frac{2\pi n}{T}$ 上有值, 即对 $f(j\omega)$ 的采样.

由 FT 的对偶性, 一个域的周期延拓 $\longleftrightarrow$ 另一个域的采样.

7. 三种常见变换的联系.

我原称之为《大统一理论》, 在傅里叶变换各种教材中都有引入.



(其实所有变换的本质都是基变换, 无非就是换了一组特设基)
这里上面“基变换”指 FS 和 DTFS 而推导过程 [基变换用双变换推导]

为了三大变换更加贯通, FS, DTFS 将从正余弦基变换推导而出.

a) FS, DTFS $\longleftrightarrow$ FT, DTFT.

i) 变换 (指正余弦的变换) 对非周期信号进行基变换, 也就是 $T \rightarrow \infty$ 的周期信号的变换, 从正余弦展开 (sin, cos 为基) (即 FS, DTFS) 直接推导 FT, DTFT.

ii) 但是这种方式的解释物理性质看不出来, 针对一种特殊的情况, 我们可以看出其内在联系.

(以 FT 为例), 选取变换的信号为周期信号 $x(t) = x(t+T)$.

回想起《信号与系统》, 周期信号 FT, $X(j\omega) = \sum_k \alpha_k \delta(\omega - k\frac{2\pi}{T})$.

似乎是为了使 FT 与双变换自洽的, 实则不然, 我们通过观察, 甚至可以由傅里叶级数表示关系.

观察基础: $FS \langle e^{jk\Omega_0 t} \rangle \longleftrightarrow FT \langle e^{j\omega t} \rangle$

$\langle k\Omega_0, \Omega \rangle$, 这能让我们联想到什么, 采样!!!

如果 $e^{j\omega t}$ 和 $e^{jk\Omega_0 t}$ 都属开同一组信号, $e^{jk\Omega_0 t}$ 显然是 $e^{j\omega t}$ 的一组采样! 一个域的采样是另一个域的周期延拓, 观察.

$$X(j\omega) = 2\pi \sum_k X(k\Omega_0) \delta(\omega - k\Omega_0).$$

这就是频域上的周期延拓, 这又说明了这是一种采样变换, 但是, 它里面的采样又不同于通常的采样, 我暂时没有推导出其中的数学关系, FS 方面应该有一个隐藏的函数, 使 $X(k\Omega_0)$ 是它的采样

DTFT 和 DTFS 关系问题.

b) $FT \longleftrightarrow DTFT$,

我在这两组变换中直接采样或时推导方式.

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) e^{-j\omega n}$$

结论: 这组变换, 以采样相关联, 使 $x(nT_s) = X(nT_s)$ 相关联.

由于 $x(nT_s) = X(nT_s)$, 它们的 FT 也存在关联.

$$\text{证: } X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{这里的 } x(t) \text{ 为 } x_s(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_n X(nT_s) \delta(t - nT_s) e^{-j\omega t} dt.$$

$$= \sum_n X(nT_s) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} \delta(t - nT_s) dt$$

$$\xrightarrow{x(nT_s) = X(nT_s)} \sum_n X(nT_s) e^{-j\omega nT_s} \xrightarrow{\omega = j\Omega} \sum_n X(nT_s) e^{-j\Omega n} = X(e^{j\Omega}).$$

$$\text{证: } x_s(t) = \sum_n X(nT_s) \delta(t - nT_s) = X_c(nT_s) = x(nT_s).$$

$$X_c(nT_s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega nT_s} d\omega.$$

$X(e^{j\omega}) \rightarrow X(j\omega)$ 有底信号的重构过程.

$$X(j\omega) = X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega}) T, \quad H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \pi/T_s \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{代入: } X_c(nT_s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(e^{j\omega}) H(j\omega) T e^{j\omega nT_s} d\omega.$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T_s}^{\pi/T_s} T X(e^{j\omega}) e^{j\omega nT_s} d\omega.$$

$$\xrightarrow{\omega = j\Omega} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega.$$

这样, 通过采样定理, 我们将 FT 与 DTFT 关联起来.

c) $z \leftrightarrow \text{Laplace}$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$$\Rightarrow X(b, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt$$

↓ 于 FT $\leftrightarrow$ DTFT 类似 - 致, 考虑 $X_c(nT_s)$ 的 Laplace 变换.

$$X_c(b, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_c(nT_s) e^{-\sigma nT_s} e^{-j\omega nT_s} dt.$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_n x_c(nT_s) \delta(t - nT_s) e^{-\sigma nT_s} e^{-j\omega nT_s} dt.$$

$$= \sum_n x_c(nT_s) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma nT_s} e^{-j\omega nT_s} \delta(t - nT_s) dt$$

$$= \sum_n x_c(nT_s) e^{-\sigma nT_s} e^{-j\omega nT_s}$$

$$= \sum_n x_c(nT_s) e^{-(\sigma + j\omega)nT_s}$$

$$= \sum_n x[n] e^{-snT_s} \leftrightarrow \sum_n x[n] z^{-n}$$

$$e^{-snT_s} = z^{-n} \Rightarrow z = e^{-sT_s}$$

通过采样定理, 我们又将 Laplace 变换与 z 变换联系起来, FT, DTFT 是 Laplace 和 z 变换在基的幅度为 1 时的特殊情况.

上述分析, 我们尽量少的运用 z 变换, 仅从采样定理, 对这三种基变换, 进行了物理意义上的联系.

8. 从 DFS 到 DFT.

为了便于推导和公式的统一性 (想以前人定义时也如此), 虽然 DFS 与 DTFS 不是一个东西, 但是 DFS 的分析公式如下:

$$\tilde{X}[K] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{x}[n] e^{j\frac{2\pi}{N}Kn}$$

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \tilde{X}[K] e^{-j\frac{2\pi}{N}Kn} \quad \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{w_N^{Kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}Kn}} \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \tilde{X}[K] w_N^{Kn} \end{array} \right.$$

另 $w_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$, 使得 $\tilde{X}[K]$ DFS 变换公式的正变换等效为, 理解式可以方便, DFS 是立足于频域的交流, 所以换种表示使频域方便理解.

A. DFS 与 DTFT 的关系.

考虑将 DFS 强制纳入 DTFT 的框架使得

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \tilde{X}[K] \delta(\omega - \frac{2\pi K}{N})$$

这样再变换回来有 $x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$, 恰如 Inverse-DFS.

回顾前面的知识, 根据一个小例子来揭示更细致的关系.

$\tilde{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-mN]$, ~~$x[n]$~~ $x[n]$ 为有限长序列.

$$\tilde{x}[n] = x[n] * \tilde{p}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-mN]$$

课本 8.3, 8.4 两个
例子都有意义 (互, 自)

$$\text{DFS} \rightarrow \begin{cases} \tilde{X}[k] = X[k] \tilde{p}[k] \\ \tilde{X}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) P(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k) \end{cases}$$

那么 $X[k] = X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$.

由此 $X[n] \xrightarrow{\text{DFS}} X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$, 即

频域 ($\frac{2\pi}{N}k$) 采样 $\xleftrightarrow{\text{DFS}}$ 时间 (N) 周期延拓

B. DFS $\rightarrow$ DFT & DTFT

推测构造 DFT 需要能实现, 存储器不可能有无限长序列, 所以将 DFS 中有用的序列拿出, 令 DFT 仅仅是 $[0, N-1]$ 区间内的 DFS, 不管是 f -域还是 t -域, $[0, N-1]$ 之外皆为 0.

课本上有句话说得好 (加以个人观点).

→ DFT 实际上用周期序列表示有限长序列.

→ DFT 实际上用周期 f -域信号表示有限长 f -域信号.

→ DFT 系防止某些 DFS 强制取区间, 只是为了存储, DFT 无周期, 却又无时无刻不暗含 周期性.

哈哈, 同上世纪的一些救世主运动一般, 来消除其矛盾.

这样来看与 DTFT 的关系更清楚了, 如果说 (其实就是在说).

DFT 是 DTFT 以 $\frac{2\pi}{N}$ 的采样 (f -域)

直接采样

DFS 是 DFT 的周期延拓, 是 DFT 的采样而后再延拓.

(延拓) DTFT 本身即为周期.

而任何定义的一句话, 只是为了更 Logic 的说明一下.

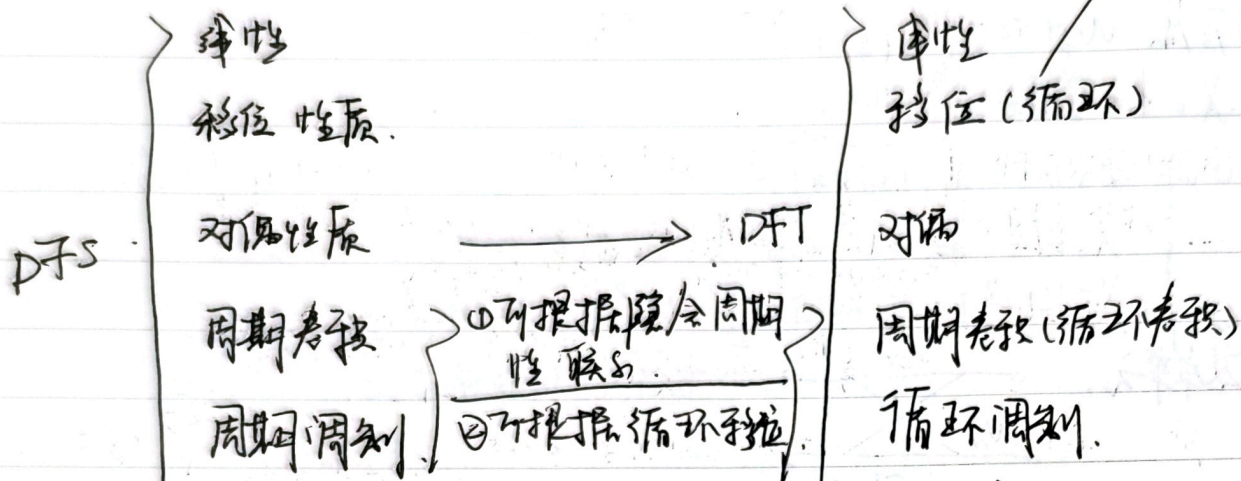
C. DFS 与 DFT 的性质

从 B Section 看出, DFT 是什么, 就是 DFS 的强制取区间, 所以

我认为, DFT 的推导并无自洽型, 它的所有推导, 都必须从 DFS.

来推导, 然后不再取固定区间, 所以, DFT的性质完全需由DFS导出.

$$\text{注意 } (1-1)_3 = (-3+2)_3 = 2.$$



详细性质不翻书, 目前有点乱我也整理下这些案子(变换)的性质共同点, 之所以说案子, 是站在更宏观角度.

9. 将计算复杂度降低的DFT $\rightarrow$ FFT Compute.

Divide and Conquer 算法级优化.

A. 按时间抽取的FFT.

书中给出了一种使用系统推导FFT的Method, 本人并不喜欢这种推导方式, 认为这种数学推导方式不够统一和简洁, 所以不从System推导, 而是直接关注于Single的推导, 致力于在Math中发现 Divide and Conquer 原理.

直接从最原始计算公式入手:

$$\begin{aligned}
 \text{Divide} \quad X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \\
 \text{奇偶分解和} &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n] W_N^{k2n} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n+1] W_N^{k(2n+1)} \quad \text{1-point DFT} \\
 e^{-j\frac{2\pi}{N}k2n} &= e^{-j\frac{2\pi}{N}k} e^{-j\frac{2\pi}{N}k2n} \\
 &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n] W_N^{kn} + W_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n+1] W_N^{kn} \quad \text{2-point DFT} \\
 \text{Compute} &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} (x[2n] + W_N^k x[2n+1]) W_N^{kn} \quad (T-1)
 \end{aligned}$$

但是, 这样并没有将计算复杂度降低到最低, W_N 的性质还未挖出来!

用 (T-1) 式, 还必须动脑子考虑隐藏周期性质 (下页图发观这个对称性).

代表两个频点 (全频点),

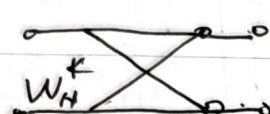
$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} + W_N^k \sum_{n=0}^{N-1} x[n+N] W_N^{kn}$$

$X[k]$ 有 N 个 point, 而两个变换只有 $N/2$ 个 point, 在 $(N/2, N)$ 中 point 计算时, 因为 W_N 的周期性, 且

$$X[k + N/2] = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n] W_{N/2}^{kn} - W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1] W_{N/2}^{kn}$$

这样, 便不必利用周期性 (其实先一步用了), 直接利用蝶耳! (蝶形图),

$$\left. \begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n] W_{N/2}^{kn} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1] W_{N/2}^{kn} \\ X[k + N/2] &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n] W_{N/2}^{kn} - W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1] W_{N/2}^{kn} \end{aligned} \right\}$$

基本单元,  , 后续有详细讨论。

B. 按频率抽取的 FFT.

按 Boolean 代数的角度说, 时间抽取是子图轴, 频率抽取就是反置轴。

1) 偶数频点,

① 直接了当 Math 推导

$$\begin{aligned} X[2k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{2kn} \\ \text{《(毫无疑义)》的拆分} &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n] W_{N/2}^{kn} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1] W_{N/2}^{kn} \\ \text{换元} &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] W_{N/2}^{kn} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n+N/2] W_{N/2}^{kn} \\ \text{合并} &= \sum_{n=0}^{N/2-1} (x[n] + x[n+N/2]) W_{N/2}^{kn} \end{aligned}$$

② 采样角度.

前一小节 (8.) 简单考虑了 DFT 与 DFT 的采样关系, DFT 以 W_N^{kn} 为基函数, 为 $N/2$ 频率采样, 时域 N 周期延拓, 若 $X[2k]$, 基函数 $W_N^{2kn} \rightarrow W_{N/2}^{kn}$, 则频率 $N/2$ 采样, 时域 N 周期延拓, 因为 $N/2$ 考虑 $W_{N/2}^{kn}$ 所以关注 $0, N/2-1$ 序列, $x[n]$ 为 N 周期序列, 如下图所示, $x[n]$ 为 N 周期延拓, 有 $x[n]_{N/2} = x[n] + x[n+N/2]$, $n \in [0, N/2-1]$.

找到了对应后 $X[2k] \xrightarrow{\text{DFT}} x[n]_{N/2} = x[n] + x[n+N/2]$.

$$\text{于是 } X[2k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} (x[n] + x[n+N/2]) W_{N/2}^{kn} = \underbrace{\text{DFT}_{N/2}}_{\text{DFT 因子}} \{ x[n] + x[n+N/2] \}$$

ii) 奇数频点.

① Math 方法.

$$X[2k+1] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{(2k+1)n}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] W_N^n) W_N^{2kn} = \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] W_N^n) W_{\frac{N}{2}}^{kn}$$

$$\text{Divid} = \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] W_N^n) W_{\frac{N}{2}}^{kn} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} (x[n] W_N^n) W_{\frac{N}{2}}^{kn}$$

$$\text{换元} = \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] W_N^n) W_{\frac{N}{2}}^{kn} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} (x[n+\frac{N}{2}] W_N^{n+\frac{N}{2}}) W_{\frac{N}{2}}^{kn}$$

$$\text{Comper} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} (x[n] W_N^n - x[n+\frac{N}{2}] W_N^{n+\frac{N}{2}}) W_{\frac{N}{2}}^{kn}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [(x[n] - x[n+\frac{N}{2}]) W_N^n] W_{\frac{N}{2}}^{kn}$$

$$= \text{DFT}_{\frac{N}{2}} \{ (x[n] - x[n+\frac{N}{2}]) W_N^n \}$$

② 移位性质.

$$X[2k] = \text{DFT}_{\frac{N}{2}} \{ x[n] + x[n+\frac{N}{2}] \}$$

$$X[2k+1] = \sum_n x[n] W_N^{kn} W_N^n = \sum_n (x[n] W_N^n) W_{\frac{N}{2}}^{kn}$$

$$X[2k+1] \xrightarrow{\text{DFT}} \underbrace{x[n] W_N^n}_{\frac{N}{2}} W_{\frac{N}{2}}^{kn}$$

$$x[n] W_N^n = x[n] + x[n+\frac{N}{2}]$$

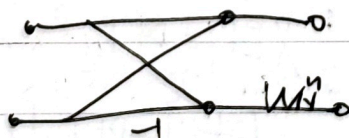
$$X[2k+1] = \text{DFT}_{\frac{N}{2}} \{ x[n] W_N^{kn} + x[n+\frac{N}{2}] W_N^{n+\frac{N}{2}} \}$$

$$= \text{DFT}_{\frac{N}{2}} \{ (x[n] - x[n+\frac{N}{2}]) W_N^n \}$$

如此, 我们分别从奇偶频点, 每种频点两种推导式的方法推导了时域抽取的FFT算法, 总结起来.

$$\left\{ \begin{aligned} X[2k] &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} (x[n] + x[n+\frac{N}{2}]) W_{\frac{N}{2}}^{kn} = \text{DFT}_{\frac{N}{2}} \{ x[n] + x[n+\frac{N}{2}] \} \\ X[2k+1] &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [(x[n] - x[n+\frac{N}{2}]) W_N^n] W_{\frac{N}{2}}^{kn} = \text{DFT}_{\frac{N}{2}} \{ (x[n] - x[n+\frac{N}{2}]) W_N^n \} \end{aligned} \right.$$

为单元



C. 从图形以及单元角度分析两种经典的FFT.

从最小单元 ($M=2$) 入手, 考察两种FFT代表什么意思.

时抽取 $X[k] = X[0] + W_N^k X[1] \Rightarrow \begin{cases} X[0] = X[0] + X[1] \\ X[1] = X[0] - X[1] \end{cases}$

即 $x[0]$ 与 $x[1]$ 交叉, W_N^0 与 W_N^1 , 所以, 最小单元直接完成了 DFT 变换.

f 抽取 $X[2k] = X[0] = X[0] + X[1], = \text{DFT}_2 \{x[n] + x[n+1]\}$
 $X[2k+1] = X[1] = X[0] - X[1] = \text{DFT}_2 \{x[n] - x[n+1]\} W_2^0$ } (f-1)

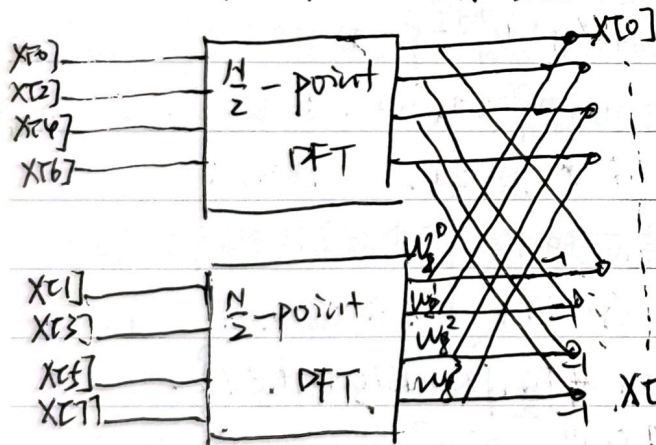
直观看差不了, 但是如果用另一种表示, 好像, 有一个奇怪的东西出现.

$$\text{DFT}_2 \{x[n]\} = X[1],$$

考察 Muth 推导 $\text{DFT}_2 \{x[n]\} = \sum_{n=0}^1 x[n] W_N^{kn} \begin{cases} X[0] = X[0] + X[1] \\ X[1] = X[0] - X[1] \end{cases}$
 只有十级, 你想想怎么换基址? 这是数基有问题

出现成 (f-1) 的原因, 仅仅因为 DFT_2 是一个线性组合, 更准确的说, 不变算子, 只是因为 DFT_2 是不变算子, $x[n]$ 不断的线性组合, 到达了 $X[k]$ 的变换.

下面列举两种典型, 典型图形.



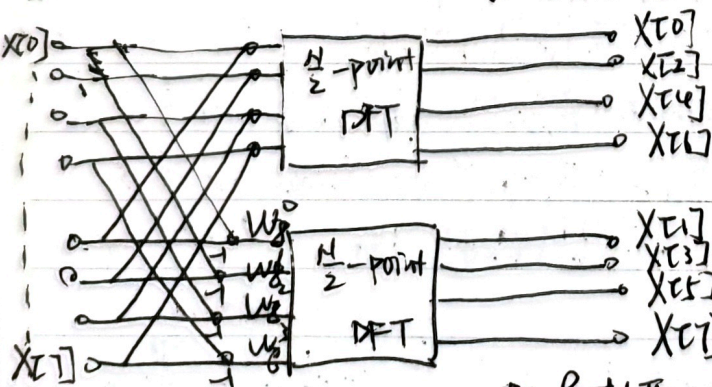
$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n] W_N^{kn} - W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1] W_N^{kn}$$

$$= X_0[k] - W_N^k X_1[k]$$

只是取个差

可以发现, 按 time 抽取, 结果是 DFT 的线性组合, 在最左端的 $N/2$ 单元已完成时域到 f 域的转变.

按 time 抽取



$$X[k] = \text{DFT}_2 \{x[n] + x[n + \frac{N}{2}]\}$$

$$X[2k+1] = \text{DFT}_2 \{(x[n] - x[n + \frac{N}{2}]) W_N^k\}$$

可以发现, 按 f 抽取, 是 Inverse-DFT 的线性组合, 是因为变量的线性组合, 直到最右端的 $N/2$ 最小单元, 完成了时域到 f 域的转变.

按 f 抽取

DFT 的线性组合 $\longleftrightarrow$ 线性组合的 DFT.

10. 初识DFT谱分析.

DFT谱分析步骤:

 $x_c(t)$ 真实信号 $x_{\text{Bandlimit}}(t)$ 频域有限信号 $x[n]$ ① $\otimes \leftarrow w[n]$ 加窗 $x_{\text{time limit}}[n]$ 时域有限信号

↓ 验证

② 补零

 $X[k]$

② 补零

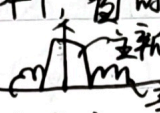
对 $x[n]$ 进行补零 (其关键是 $x_{\text{time limit}}[n]$, 这呈字着方便), 相当于时域延长周期, 进行周期延拓, ($N \uparrow$), 那么对应频域就是频域过采样 ($\omega = \frac{2\pi}{N} \downarrow$), 那么可以更直观的恢复其 DTFT.

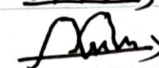
这是对分辨率的考虑, 类比为栅栏, 加窗, 相当于干涉, 已经决定了滤波的最终情况 (DTFT), 而不论如何补零, 只相当于小孔的变量改变, 只影响栅栏内的情次, 最终的效果就是重现栅栏, 没有新的信息, 也不可能有的信息, 但合理时域补零 (频域过采样) 可以使得 DFT 线性内推出精确的 DTFT.

采样频率

③ $k \rightarrow \omega \rightarrow \Omega$ } $\omega = \frac{2\pi}{N}k$, $\Omega = \frac{2\pi}{NT}k = \frac{2\pi}{N} \frac{f_s}{T} k$ } 两种频率归一化 } $\Omega = \frac{2\pi}{NT}k = \frac{2\pi}{N} \frac{f_s}{T} k$

① 加窗

加窗是为了获得时域有限信号, 以便后续进行 DFT, 窗的种类有很多, 但都在频域有  的样子, 窗口度越长, 主瓣宽度越窄, 即成反比关系, 那么 DFT 也就相当于以窗函数的 DFT 为基础进行插值, 这便会带来问题, 最简单易看的, $\cos(\omega n) \xrightarrow{\text{DFT}} \text{Dirac}$

加窗不当有 , 两个

频率发生混叠, 无法分辨, 总结

加窗不当有 (对频域)

加窗 } 频率分辨率相互影响, 泄漏.
↓
频率分辨率降低 2. 泄漏.

11. 所有的变换都是在做展开和内插。

受陈友义的《数字信号处理原理及应用》启发。

在 DFT 章节中, 作者以插值 $\leftrightarrow$ 展开的角度, 阐述了 $X(z)$ $X(e^{j\omega})$ $X[k]$ 之间的内插关系, 内插基函数是只在对应点有值, 在点之外为 0 的函数, 确保了子采样以及函数的复原。内插基函数的推导有以下步骤, 用 $X(z)$ 以 k 域基序 (频域) 展开为例, $z \leftrightarrow$ DFT。

$$X(z) = \sum [x[n]] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}.$$

只需要用 IDFT 替换基序 n 。

在连续和离散之间的内插, 需对黎曼积分进行变形, 如。

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j\Omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{j\Omega nT}.$$

再使用 IDFT 代入。

一个有趣的发现, 上述公式有

$$\begin{aligned} X(j\Omega) &= X(jk\Omega_0) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nT] e^{j\Omega nT} \\ &= T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nT] e^{-j2\pi n} \\ &= T X(e^{j\omega}). \end{aligned}$$

这是一种很新颖理解采样方式, 用无限多长方形面积逼近积分, 竟能对应采样变换的能量关系, 以前想获得 T , 只能一步一步推导。

这些引起我的两个思考, 一个思考无需验证, 另一个需后续研究

- 一下:
1. 一个函数 x 按不同基序展开, 从而获得不同的意义和结果
 2. 变换之间的能量关系, 不同域的幅值究竟有什么关系。

对卷积的新理解, 无非就是一种因子关系, 所有参与项的自变量的和与抵消积分变量, 留下自变量, 始终都是如此。

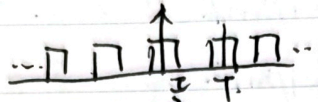
$$H(e^{j\omega}) = H_0(e^{j\omega}) \otimes W(e^{j\omega})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H_0(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \quad \text{且 } \theta + (\omega - \theta) = \omega.$$

12. 三种经典的采样方式

< 冲激采样 >

< 自然采样 >

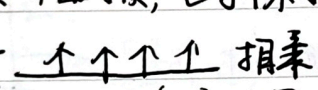
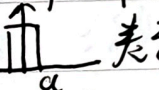
又称曲顶采样, 时域为  采样。
频域为其表积, 有

$$* Y(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} X(j(\omega - k\omega_s))$$

可见, 每个延拓的周期都被 sinc 因子给调制加权了, 重建的时候把这个因子乘回来就好。

< 平顶采样 >

与自然采样对比, 一个平顶一个曲顶, 这种采样很接近 A/D 中的采样。

时域:  采样) 再  表积
频域有: $Y(j\omega) = 2 \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$

可见, $X(j\omega)$ 的每一处都被加权了, 跟已经不存在有的函数, 重构需要构造这个因子相应的低通滤波器。

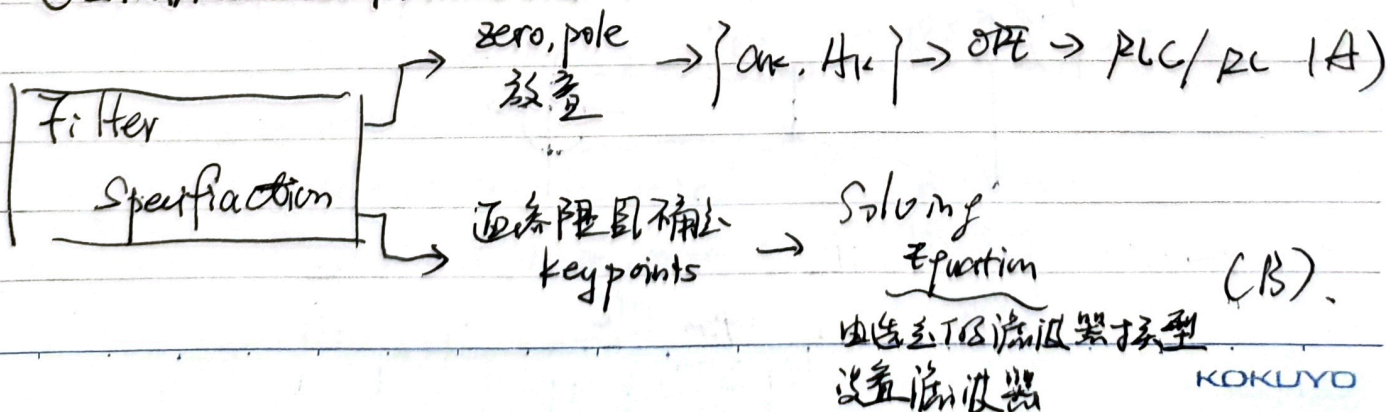
显而易见, 如果直接使用平顶采样信号, 高频分量少很多, 但一般不会这样用。(孔径效应)。

使用采样保持电路可以轻易的完成该采样。

13. 间接法设计 IIR 滤波器

所谓间接法设计 IIR 滤波器, 就是将离散指标转为连续指标, 再由连续指标设计连续滤波器, 再通过 $s \rightarrow z$ 的映射方法映射到离散。

① 连续滤波器设计方法 (模拟)



(A) 式是一种完全主观的设定方法, 上下限都不同, 可设计出比较精妙的, 而这些精妙的我们已经有现成模板, 这是前人总结的经验, 有这些, 我们根据具体目标确定滤波器参考即可。(B).

例如巴特沃斯滤波器.

$$|H_c(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}$$

其中, ω_c 为截止频率, N 为阶数, 有综合指标, 便可求得.

② $s \rightarrow z$, $\omega \rightarrow \omega$ 变换式.

a) 脉冲响应不变法.

解: 对连续域采样.

频: $z = e^{sT}$ 映射, 但

每个 $\frac{2\pi}{T}$ 区间都映射到

单位圆 (这样说不妥, 应是整个 z 域), 这也是混叠的根本.

$$\text{变换式} \begin{cases} h_{cn}(T) = \alpha h_{cn}(T) \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{\alpha}{T} H_c(j\omega) \\ z = e^{sT} \Rightarrow \omega = \Omega T. \end{cases}$$

虽说 $H(e^{j\omega}) = \frac{\alpha}{T} H_c(j\omega)$, 但混叠存在, 或者, 滤波器与 α 无关.

频率: $H_c(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k}$

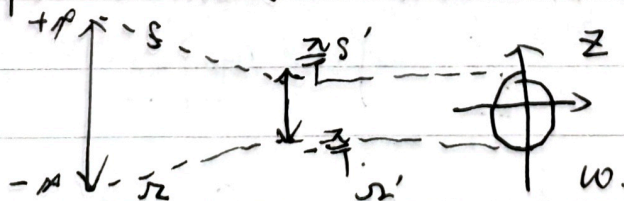
但 α 一般取 1.

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ h_c(t) \rightarrow h_{cn}(T) \\ \downarrow \\ H(s) \end{array}$$

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{T_k A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

b) 双线性变换法.

解决 a) 方法多对一映射关系, 将 s 域无偏后再映射.



$$s \rightarrow s': \text{注意到 } \tan \frac{\omega}{2} \rightarrow +\infty, \tan \left(\frac{\omega}{2} \right) \rightarrow -\infty,$$

$$\text{构造 } \omega = \tan \frac{\Omega T}{2}$$

$s' \rightarrow z$: 8 a) 一样, 线性映射, $w = j\Omega T$.

$$s \leftrightarrow z = \left\{ \begin{array}{l} \Omega = \tan \frac{w}{2} \\ w = 2 \arctan \Omega \end{array} \right.$$

使用欧拉公式展开再推导有 $j\Omega = \frac{1-e^{jw}}{1+e^{jw}}$

$$\text{即 } s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

即变换公式, 但我们经常加个系数, 系数哪来

$$\Omega = \tan \frac{w}{2} \xrightarrow{w \rightarrow 0} \Omega = \frac{w}{2}$$

现在经典线性相位 $\Omega = w/T$

$$\text{那么 } \Omega = \frac{w}{2} \Omega, \Omega = \frac{T}{2} \frac{w}{T}$$

$$\text{那么有, } \Omega = \frac{T}{2} \tan \frac{w}{2}$$

$$\text{变换式 } \left\{ \begin{array}{l} \Omega = \frac{T}{2} \tan \frac{w}{2}, \quad w = 2 \arctan \frac{\Omega T}{2} \\ s = \frac{z}{z^{-1}} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \end{array} \right.$$

可看出什么变换模拟域幅度, 但线性相位不得保留相位非线性失真

③ 系数作用与思想比较

系数的作用就是, 没有任何作用, T 没有任何作用

a) 对于响应不变一般取 T , 若有一设计指标 (即特沃斯)

$$0.99 \leq |H(e^{jw})| \leq 1, \quad 0 \leq w \leq 0.2\pi$$

$$\rightarrow 0.99 \leq |H(e^{j\Omega})| \leq 1, \quad 0 \leq \Omega \leq \left(\frac{0.2\pi}{T}\right)$$

T 不同, 该值不同

$$\text{求解中, } |H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{0.2\pi}{T\Omega}\right)^{2N}}$$

零极点由幅平方

系数的平方解不出来

那么任何 T 的制做 N 和 $T\Omega_c$ 都是相同的, 这意味着 $|H(j\Omega)|^2$

相同, 零极点相同, 零极点相同还有其它什么事, 都是一个 $H(z)$

$H(z)$ 完全由 zero-pole 解出来

b) 对于双线性变换 $\Omega = 2 \tan \frac{w}{2}$

$$0.99 \leq |H(e^{j\Omega})| \leq 1, \quad 0 \leq \Omega \leq 2 \tan \frac{0.2\pi}{2}$$

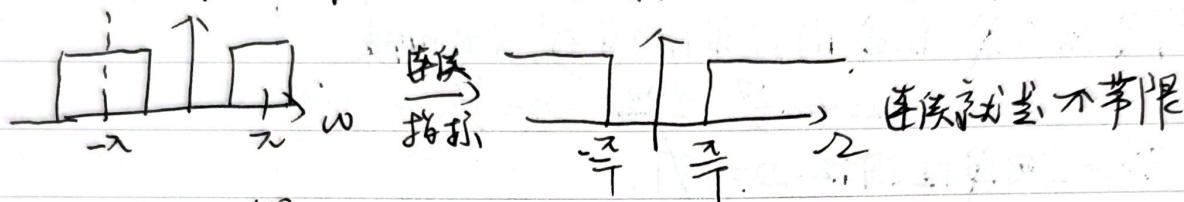
$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\tan \frac{\Omega T}{2}}{\frac{\Omega T}{2}}\right)^{2N}}$$

即采样 N 与采样率相同,才又无失,要报点,不更.

子波对滤波器无影响...吗?

流量怎么说? T 小, T 大?? (响应不变)

画完了,连续Filter指标由离散Filter给出,即 $\Omega = \frac{\omega}{T}$,
要求带限才能采样不混叠,与连续滤波器没有任何关系,如我采样高通.



$\Omega = \frac{\omega}{T}$, T 小了, Ω 就大, T 大了, Ω 就小, T 不可控制任何混叠,混叠只与原始指标有关,所以:

响应不变方法只适合低通设计.

双线性方法适合多段性滤波器设计,如高通,低通,带通.
另外,要提一句,两种变换方式不管而滤波器解于其因果关系,该什么样,还是什么样.

还有通过有低通滤波器再经频率变换式得到其他低通,高通,带通,带阻滤波器.

Digital Signal Processing. 课内卷56.

Block 1. DSP Basics.

<1. Introduction>.

Introduction $x(t)$.

① Continuous-time signal $\uparrow$

$\downarrow$ 时间连续, 离散.

Discrete-time signal $\downarrow$

Analog Signal
时间, 幅度连续
↓
离散时间, 而量化值
Digital Signal

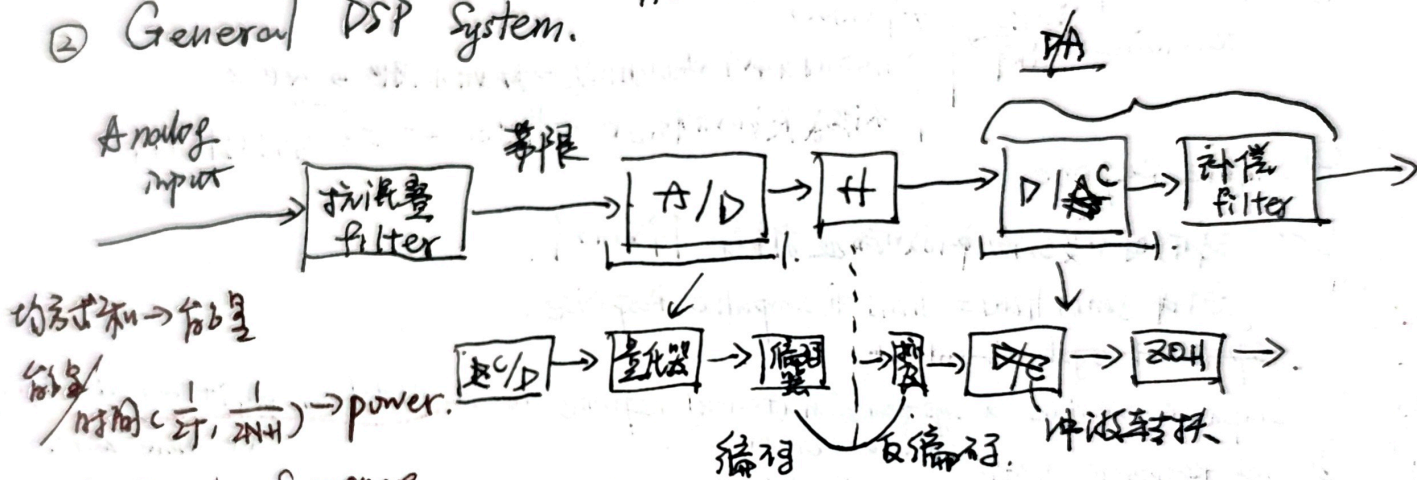
Discrete-time signal.

Digital Signal

Sampling
(cuts)

Quantization. $X[n]$

② General DSP System.



③ Rectangular Sequence.

$$x_n[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n < 0, n \geq N \end{cases}$$

④ Amplitude response = amplitude ratio = $20 \log_{10} \frac{A_1}{A_0}$ $\rightarrow$ output
power ratio = $10 \log_{10} \frac{P_1}{P_0}$ $\leftarrow$ Input. Decibel

2. Sampling and Quantization > Digitisation.

① 三種 Sampling.

A. 理想 Impulse sampling

B. Natural Sampling 又称曲顶采样。
与周期脉冲信号相乘，易受噪声污染

c Flat-top Sampling.

看成了周朝中既相乘而，再寸草心中表秋。

Aperture effect 高频能量丢失 $\rightarrow$ Aperture error

→ 通过调整脉冲或使用 equalizer circuit 缓解。

信号为类此: Sample and hold circuit, 高电平跟随, 低电平保持
 $T_s + T_h = \text{一个采样/保持周期}$

② 量化

N 个位, $\Delta = \frac{V_{max} - V_{min}}{2^N} = \frac{V_{max} - V_{min}}{2^N}$

$a_n = V_{min} + (n + \frac{1}{2})\Delta, n=0, \dots, Q-1, \Rightarrow$

$Q_0 = V_{min} + \frac{\Delta}{2}$

$Q_{Q-1} = V_{max} - \frac{\Delta}{2}$

量化误差是差值的绝对值

实际上 D/A 处理中量化后的信号, 此时已经是连续信号

③ 采样和量化, D/A 用于两个地方

→ D/A, 输入为数字信号

PPT 上 - 詹姆斯的论述为人作证

D/A → DAC

→ A/D, 输入的为连续信号 (模拟)

sample and hold ADC

不是 = 而是 <, 交界处可能混叠

3. Aliasing

① Nyquist frequency = $\frac{f_s}{2}$ Nyquist rate f_s

f_n 最高可分辨频率

最大带宽 (Hz)

采样率大于奈奎斯特频率

最低采样率 (不可再, 再下一点)

② Undersampling → Aliasing, 信号中出现其他频率量

斜率太陡

寻找混叠频率是一个优化问题: $\min |nf_s - f|$ 或 $\min |f - nf_s| = f_a$

(f 指 signal 频率, f_s 采样频率)

s.t. $n \geq 0$

f 混叠到 f_a

③ 那么, 如果初始频率被混叠, 是否可以反推原频率 (相对简单三角函数)

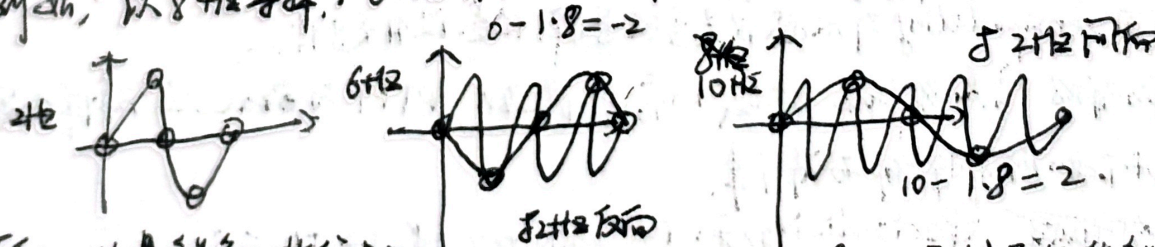
利用 $f_a = f - nf_s$, 即另一个优化问题 (也是同一-挂)

$f_a = f - nf_s, n \geq 0$

$\min |f - nf_s|$ 即存在 n , s.t. $f_a = f - nf_s$ offset - 值, 负之相反

如果 f_a 是负的, 那么判断信号的相位变化, 反之则混叠信号完全相同

例如, 以 8 Hz 采样, 6 Hz 和 10 Hz 都被混叠到 2 Hz (sin 函数)



所以, 如果得知一些信号被混叠到 $x(t) = \sin(2\pi f_a t)$, 虽然可以得知混叠前信号可能的频率, 但是其相位并不相同

a input then flip in time version of itself → 对称

4. Convolution

① 线性卷积结果对称 (自身中心对称) ↔ 卷积的两个信号自身对称

② 离散卷积结果 $f[n] * g[n] = \sum_k f[k]g[n-k]$ 卷积之和为 n , 卷积结果 $x+y=n$, 一致

- 可以用表格法求卷积, 注意表格横纵列的起始标号一致相同

- 用循环矩阵, 需知用 $N+N-1$ 维来确保长度

- 也可以用定义

③ 圆卷积
序列长度必须通过补零达到相等，周期卷积卷积，长度在运算后不变。

$$f \otimes g = \sum_{m=0}^{N-1} f[(n-m) \bmod N] g[m]$$

① 取模符号, $\langle 3 \rangle_2 = 1, \langle 1 \rangle_2 = 1 \quad (-2+1)$

一 循环卷积, 卷积矩阵为循环
离散卷积的线性卷积和圆卷积的卷积形式都是卷积移位相乘, 不同的就是
圆卷积卷积有周期移位, 而离散卷积卷积来平移处为0.

④ 借用FFT实现圆卷积代替线性卷积方法

Top1: $z \rightarrow$ Circular 循环卷积
Linear $\rightarrow$ Circular 圆卷积

重叠相加

重叠保留

PDT中的方法像是时域补0直至时域卷积长度相等

⑤ 即圆卷积的补0为 $M+N-1$

BLOCK 2, Transform Methods.

<1. 连续域变换> FS, CTFT, Laplace. 单也.

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad (\text{书中定义为此, 非 } -1 \text{ sinc 函数})$$

$$\text{由 } x[n] = x[nT_s] \quad \text{相互推导出} = x[nT_s] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(kT_s)$$

<2. 离散域变换> DTFT, Z, ROC

① Z变换的初值定理 $\lim_{z \rightarrow \infty} z X(z) = x[0]$
② 终值定理, 只考虑有理函数, 注意讨论 ROC, 乘式展开.

<3. DFT>

① $k \rightarrow \omega \rightarrow f$

$$\sum_{n=0}^{N-1} k = \omega = 2\pi, \quad k = \frac{2\pi N}{2\pi} = \frac{2\pi f N T}{2\pi} = N T f$$

$$f = \frac{k}{N T} = k \frac{1}{N T} = k \frac{f_s}{N}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ w_N^0 & w_N^1 & w_N^2 \\ w_N^2 & w_N^4 & w_N^6 \end{bmatrix}$$

② 使用 zero-padding 可以提提供更灵活的采样, 但是没有更多信息.

所有的信息都被时域加窗所限制, DFT 的谱已经分辨率不够, DFT 如何采样都无济于事.

③ 周期性 (Periodicity) 和 (Symmetry) 是 FFT 的重要性质.

④ 使用频域相乘算时域圆卷积.

<4. FFT>

① ceil 升序, 不小于等量矢量的最小整数, $\text{ceil}(\log_2 P) = 4$

用于确定 FFT 的级数.

$$\sum_n (x[n] \pm w_N^{kn} x[2n+1]) w_N^{kn} \quad X_1[k] \pm w_N^k X_2[k]$$

② DIT $\rightarrow$ 先 DFT 再串性组合, 输入 Bit-reversed 组合

DIF $\rightarrow$ 先串性组合再 DFT, 输入 Bit-reversed 组合.

③ 复杂度. ~~2~~ 加法, 乘法. $\log_2 N$ 级数 (个图)

$$A_c = \frac{1}{2} \log_2 N = \log_2 N$$

$$M_c = \frac{1}{2} \log_2 N$$

Block 3. DSP system.

<1. DSP 系统性质>

Linear system $\rightarrow$ $\left. \begin{matrix} \text{homogeneous} \\ \text{additive} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{superposition}$

Time-invariant system $\rightarrow$ 输入时移, 输出相同时移.

Causal system $\rightarrow$ 不依赖未来时间

$\rightarrow$ $\left. \begin{matrix} \text{non-causal} & \text{依赖未来时间} \\ \text{anti-causal} & \text{只依赖未来时间} \end{matrix} \right\}$

memoryless system $\rightarrow$ 只依赖于当前时间

<2. 描述 LTI 系统>

① Difference Equation

recursive $\rightarrow$ 递归

递推 (类似)

$n < 0$ 时输入输出为 0 因果 $\rightarrow$ 初始状态 $\rightarrow$ 双边 Z

不满足初始状态 $\rightarrow$ 单边 Z $\leftarrow$ 二者时移性质不同.

② Impulse Response.

$\rightarrow$ 线性时不变系统冲激响应推导 $\{x[n]\}$.

利用 $\delta[n] + h[n] = h[n]$ 为 Impulse Response.

represent system's output

Impulse provides a system's natural response to a sudden, unit magnitude input at time zero.

③ Step Response

sudden change
constant change

Step Response shows how the system responds to a sudden change in input.

输入 $u[n]$, 输出 $s[n]$.

④ Frequency Response

describes how the system responds to sinusoidal input signals of different frequencies.

a) Amplitude Response.

$|H(e^{j\omega})| = \sqrt{H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega})}$, $\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{f}{f_s} \rightarrow$ normalized frequency

b) Phase Response.

determine the amount of time delay that the system introduces to different frequency components of the input signal.

$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\angle H(e^{j\omega})}$ $\angle H(e^{j\omega}) = \arctan \frac{\text{Im}(H(e^{j\omega}))}{\text{Re}(H(e^{j\omega}))}$

Linearly Phase $\rightarrow$ 相位响应是线性函数, 群延迟为 constant $\rightarrow$ 波形 shape 不变.

⑤ Transfer Function.

$\sum a_i y[n-i] = \sum b_j x[n-j] \Rightarrow \sum a_i z^{-i} Y(z) = \sum b_j z^{-j} X(z) \Rightarrow Y(z) = \frac{\sum b_j z^{-j}}{\sum a_i z^{-i}} X(z)$

$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum b_j z^{-j}}{\sum a_i z^{-i}} \Rightarrow$ 反推 Difference equation. (其系数推 $h[n]$)

但是若用部分分展开求 $h[n]$, 其实并不用也. 因为 $\frac{1+z^{-1}+z^{-2}}{1+z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}}$ 可以真分反推.

<3. Stability>

① Poles and Zeros.

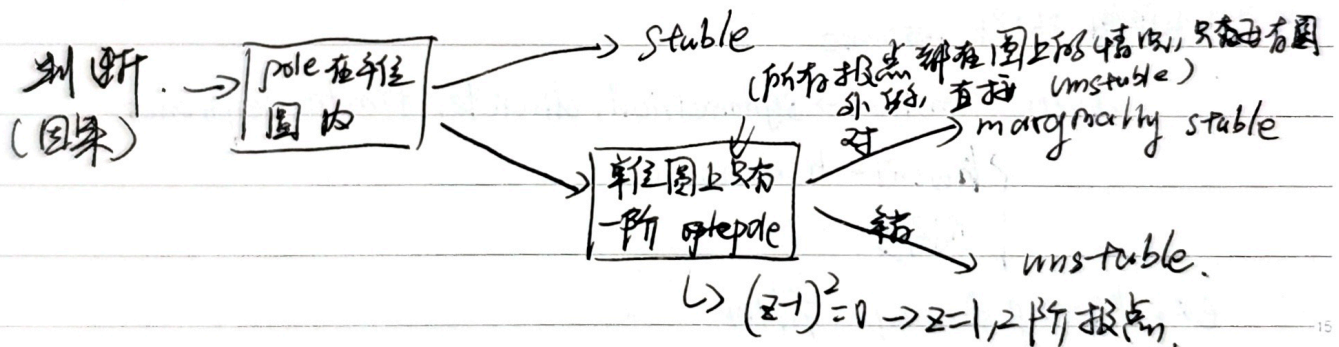
The location of zeros influences the system's response and the frequencies at which it attenuates or amplifies signals.

The location of poles affects the stability and dynamics of the system.

使用 z 而不是 s 用于表达 Transform function, 零点 (o) 表示频率特性.

② Stability

Marginally stable system will neither return to ^{steady-state} equilibrium nor diverge but will either continue oscillating indefinitely with a constant amplitude or remain at a non-zero constant output in response to the disturbance.



Block 4.

<1. 滤波器引入>

用解 { Signal separation, when a signal has been contaminated with noise.
Signal restoration, when a signal has been distorted in some way

① 框图

$$\sum a_i y[n-i] = \sum b_j x[n-j], \text{ 般用 } y[n] = -\sum a_i y[n-i] + \sum b_j x[n-j] \text{ 表示}$$



② Step Response { Setting Time < 从开始到在容限内稳定时间
Overshoot & basic distortion of the information contained in the time domain.
phase Linearity: symmetrical.

③ Frequency Response.

a) Amplitude Response

}	passband : pass, ripple.
	transition band: narrow, fast roll-off
	stopband : stop band attenuation.

④ 滤波器组合.

全通 (All pass) $[X(z) * S(z)]$ - Loss pass $\rightarrow$ High-pass

有 Loss pass 和 High pass, 可以组成 Band-pass, Band-stop.

<2. FIR 滤波器设计>

所有 pole 都在原点, stability 有保障, 通常有 linear phase.

$\frac{\sin \pi n}{\pi n} \rightarrow$ PPT 上定义的 sinc 函数.

将一已有的? Truncate $\rightarrow$ introduce ripples and overshoots.

该变为有限长 shift response

window function $\rightarrow$ symmetrical, discrete, finite sequence

$$\begin{cases} h_w[n] = h[n] \cdot w[n] \\ \text{时移} \end{cases}$$

ex. Moving Average Filter

decrease the amplitude of the random noise, but reduce the sharpness of the edges.

在 PPT 中

} Hanning window = some smoothing

Hamming window: ~~eliminate~~ eliminate high frequency noises.

Rectangular $\rightarrow$ abrupt truncation.

< 3. IIR 滤波器设计 >

① IIR $\rightarrow$ 因为 feedback, 所以 infinite, non-linear phase response.

greater attenuation of frequency components, sharper frequency roll-offs, 实时, 比 FIR 快.

优 } cheap, easy
Low computational complexity
sharper frequency roll-offs
缺 } unstable
non-linear response.

② Bilinear Transform.

间接法, 模拟 $\rightarrow$ 离散 $\rightarrow$ 离散.

$$H(z) = H(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \rightarrow \text{模拟滤波器, 离散化} \rightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} \text{ 离散化}$$

[PPT] 采取一种十步出类拔萃 (艺术) 的试验设计双线性.

frequency warping effect: $\Omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega}{2} \cdot T.$

$\rightarrow$ 频率畸变 $\Omega \sim \omega$, 非线性.

在设计指标时, 使用 $\Omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega}{2} T$ 进行 pre-warp.

③ Butterworth Filter 设计. (低通).

~~$$|H_a(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}}$$~~

$$H_a(j\Omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}}.$$

即 $H_a^2(j\Omega) = \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}} \right)^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}.$

缺点, steeper roll-off, but, phase distortion, unstable.

由 $1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N} = 0$ 求极点, $1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N} \Rightarrow 1 + \left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N} = 0, s = j\Omega_c e^{j\frac{(2k+N+1)\pi}{2N}}.$

根按阶数分布在单位圆上.



1-order.

$$H(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_c}}$$

3-order

$$\frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)}.$$

把 s 换成 $\frac{s}{\omega_c}$ 即可.

2-order $H(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2 + \sqrt{2}\left(\frac{s}{\omega_c}\right) + 1}.$

$\rightarrow$ 本节课主要讨论 Ω_c 或 ω_c 和 N 的设计, 设计? 标准.