

Signals and Systems.

一、信号与系统。

二、~~LTI~~ LTI 系统。

三、FS, DTFS.

四、FT, DTFT. 奇点讨论。

五、Sampling.

六、Laplace transformer. 复数域。

七、Z transformer.

一、信号与系统。

1. 时变与变换 (信号) $\left\{ \begin{array}{l} x(t) \rightarrow x(t+\beta), \text{ 左移 } \beta \text{ 秒, 右移 } \beta \text{ 秒又进行反折及变换.} \\ \text{注意变换只对自变量而言, 一移位自变量上移, ex. } x(t+1) \xrightarrow{\text{时间轴}} x(-t+1). \end{array} \right.$

2. 任何信号都可称为奇信号和偶信号之和。

3. 信号能量 $E = \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-N}^{+N} |x[n]|^2$

信号功率 $P = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} |x[n]|^2$

$\Rightarrow$ 能量有限, 功率有限, 能量功率有限。

4. 单位冲激函数。

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} [u(t+\frac{\Delta}{2}) - u(t-\frac{\Delta}{2})]$$

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} u(t), \quad u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) dt, \quad \frac{d\delta(t)}{dt} = \frac{\delta(t+\frac{\Delta}{2}) - \delta(t-\frac{\Delta}{2})}{\Delta}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta'(t-t_0) dt = - \frac{d}{dt} f(t) \Big|_{t=t_0} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta^{(n)}(t-t_0) dt = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} f(t) \Big|_{t=t_0}$$

$$\delta(\alpha t) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(t), \quad \alpha > 0$$

5. 斜坡函数 (Ramp Function).

$$r(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} = t u(t), \quad r[n] = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} = n u[n]$$

6. $\text{sgn}(t) = 2u(t) - 1$

6. 系统性质.

记忆 (是否取过去时间输入).

可逆 (不同输入不同结果, 一一映射).

因果 (输出只依赖于过去及当下).

稳定 (BIBO) $|x(t)| < B \Rightarrow |y(t)| < A$.

时不变 (Input 时移, output 产生同样时移, 时不变) 或 $(Hs^t = s^t H)$.

线性 (Superposition and Homogeneity).

线性映射 $x(t) \rightarrow [H] \rightarrow y(t)$.

$$\text{令 Input: } x[n] = \sum_{i=1}^N a_i x_i[n]$$

$$\text{若 output: } y[n] = \sum_{i=1}^N a_i y_i[n], \text{ 则为线性.}$$

重输入 n 倍为重输出.

$$\sum_{k=n}^{n+m} 2^k \rightarrow \text{位移 } (n+m) - n = m \rightarrow m+1$$

二. LTI 系统.

1. 卷积和. $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] = x[n] * h[n]$ (注意卷积和直接 $\times \frac{1-k\alpha}{1-\alpha}$)

2. 卷积积分. $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = x(t) * h(t)$.

在进行 Convolution 运算时, 主元一直为 k 或 τ , t 或 n 仅仅为常数, 对 $h[n] \Rightarrow h[n-k]$ 的
 视为, $h[n] \xrightarrow{\text{时移}} h[k] \xrightarrow{\text{反转}} h[-k] \xrightarrow{\text{时移}} h[n-k]$ 注意, 时移位移为右移 n ($n > 0$) 或左移 n ($n < 0$)
 在统一方便处理时, 全取 $n > 0$, 即假设 $n > 0$, 而右移 n .

3. 线性时不变性质.

交换, 分配, 结合 (与卷积相关).

记忆, 如果无记忆, $h[n] = k \delta[n]$, $h(t) = k \delta(t)$ ($k = h[0]$ 为常数).

可逆 $h[n] * h_{inv}[n] = \delta[n]$.

因果 $h[n] = h(t) = 0, (n < 0, t < 0)$. (initial rest, 初始松弛)

稳定. BIBO, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty, \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$.

4. 单位阶跃响应. (unit step response).

$$s[n] = u[n] * h[n], s(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^t h(\alpha) d\alpha, \left| \frac{ds(t)}{dt} = h(t) \right|$$

5. Block Diagram Representations.

$$x[n] \xrightarrow{C} Cx[n]$$

$$x(t) \rightarrow \left[\int \right] \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha$$

三、FS, DTFS.

1. eigenvalue, eigenfunction.

Laplace.

$$e^{st} \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow e^{st} * h(t) = e^{st} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau = e^{st} H(s).$$

$$z^n \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow z^n * h(t) = z^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) z^{-k} = z^n H(z).$$

2. FS, DTFS.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] e^{jk\omega_0 t} \xleftrightarrow{FS} x[k] = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt.$$

$$\cancel{x[k]} \quad x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] e^{jk2\pi n} \xleftrightarrow{DTFS} x[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jk2\pi n}$$

$$3. \text{sinc}(u) = \frac{\sin(\pi u)}{\pi u}.$$

四、FT, DTFT, Laplace.

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, & X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, & \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta(\omega - k\omega_0) \\ x(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds, & X(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt, & \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt \end{aligned} \right\}$$

1. 收敛域 (Laplace).

有理信号, 右半信号 $\xrightarrow{\text{pole}}$ 极点, 稳定性 $\xrightarrow{\text{pole}}$ 极点

$\xrightarrow{\text{pole}}$ 极点 $j\omega$ 轴, 稳定, 收敛域已标在右半面 (从极点向右) 因果.

2. Time-Bandwidth Product. (时间带宽积).

有效时宽, 有效带宽均有严格定义, $T_e B_e \geq \frac{1}{2}$.

$$T_e = \left[\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |x(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad B_e = \left[\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |X(j\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

effective duration

effective bandwidth.

3. 对偶性质 (Duality Property of FT).

$$\boxed{\begin{aligned} f(t) &\xleftrightarrow{FT} F(j\omega) \\ F(j\omega) &\xleftrightarrow{FT} 2\pi f(-t) \end{aligned}}$$

五. DTFT, Z.

1. DTFT and Duality Property.

$$\cancel{x[n]} \leftrightarrow \cancel{X(e^{j\omega})} \quad \left[\begin{array}{l} g[n] \leftrightarrow f[k] \\ f[n] \leftrightarrow \frac{1}{N} g[-k] \end{array} \right]$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega, \quad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}, \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta(\omega - k\omega_s)$$

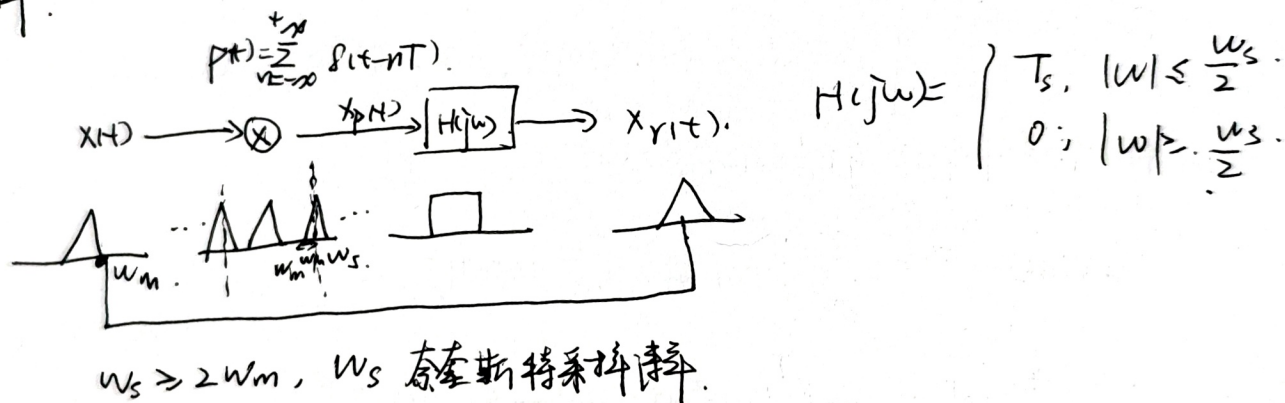
2. $x[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \oint X(z) z^{n-1} dz, \quad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$

3. 收敛 (Z变换).

在单位圆内收敛, 因果, 收敛单位圆, 收敛.

同时用极点表示.

六. 采样.



七. 分析.

$$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow \boxed{y(t)} \Leftrightarrow X(j\omega) \rightarrow \boxed{H(j\omega)} \rightarrow Y(j\omega), \quad H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

差分方程或微分方程表述, 使用性质: magnitude response: $20\log|H(j\omega)|$.

全子变换对.

FT.

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases} \leftrightarrow \frac{2 \sin(\omega T_1)}{\omega}$$

$$\frac{\sin(Wt)}{\pi t} \leftrightarrow X(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$

DTFT.

$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases} \leftrightarrow \frac{\sin[\omega(N_1 + \frac{1}{2})]}{\sin(\frac{\omega}{2})}$$

$$\frac{\sin(Wn)}{\pi n} \leftrightarrow X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\omega| < W \\ 0, & W < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

~~Laplace~~

$$(n+1)2^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{(1-2z)^2}$$

Laplace

$$\begin{aligned} \cos(\omega_0 t) u(t) &\leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, & e^{-at} \cos(\omega_0 t) u(t) &\leftrightarrow \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2} \\ \sin(\omega_0 t) u(t) &\leftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}, & e^{-at} \sin(\omega_0 t) u(t) &\leftrightarrow \frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2} \end{aligned}$$

Z.

$$-u[-n-1] \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}, |z| < 1.$$

$$(n+1)u[n] \leftrightarrow \frac{1}{(1-z^{-1})^2}, |z| > 1.$$

$$(n+1)2^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{(1-2z^{-1})^2}, |z| > 2.$$

LT

DTFT

Laplace

Z

时移

频移

卷积

卷积

卷积

卷积

微分

其它

$$x(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

$$e^{j\omega_0 t} x(t) \leftrightarrow X(j(\omega-\omega_0))$$

$$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(j\omega) Y(j\omega)$$

$$x(t) y(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) Y(j\omega) d\omega$$

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi \delta(\omega)$$

$$\frac{d}{dt} x(t) \leftrightarrow j\omega X(j\omega)$$

$$j \frac{d}{d\omega} X(j\omega) \leftrightarrow t x(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

$$x[n-n_0] \leftrightarrow e^{-j2\pi n_0} X(e^{j2\pi})$$

$$e^{j2\pi n} x[n] \leftrightarrow X(e^{j(2\pi-2\pi_0)})$$

$$x[n] * y[n] \leftrightarrow X(e^{j2\pi}) Y(e^{j2\pi})$$

$$x[n] y[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j2\pi}) Y(e^{j(2\pi-\omega)}) d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} X(e^{j2\pi}) \otimes Y(e^{j2\pi})$$

$$n x[n] \leftrightarrow X(e^{j2\pi})$$

$$x[n] - x[n-1] \leftrightarrow (1-e^{j2\pi}) X(e^{j2\pi})$$

$$j \frac{d}{d\omega} X(e^{j2\pi}) \leftrightarrow n x[n]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j2\pi})|^2 d\omega$$

$$x(t-t_0) \leftrightarrow e^{-s t_0} X(s)$$

$$e^{s_0 t} x(t) \leftrightarrow X(s-s_0)$$

$$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(s) Y(s)$$

$$x(t) y(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} X(s) Y(s) ds$$

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} X(s) + \frac{x(0^-)}{s}$$

$$\int_0^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} X(s) - \frac{x(0^-)}{s}$$

$$\frac{d}{dt} x(t) \leftrightarrow s X(s) - x(0^-)$$

$$t x(t) \leftrightarrow -\frac{d}{ds} X(s)$$

$$\frac{d^n}{dt^n} x(t) \leftrightarrow s^n X(s) - s^{n-1} x(0^-) - \dots - x^{(n-1)}(0^-)$$

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s X(s)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s X(s)$$

$$x[n-n_0] \leftrightarrow z^{-n_0} X(z)$$

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \leftrightarrow X(e^{j(\omega_0-2\pi)})$$

$$x_1[n] * x_2[n] \leftrightarrow X_1(z) X_2(z)$$

$$x_1[n] y_1[n] \leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j2\pi}) Y_1(e^{j(2\pi-\omega)}) d\omega$$

$$n x[n] \leftrightarrow X(z)$$

$$n x[n] \leftrightarrow -z \frac{dX(z)}{dz}$$

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$